

# or-14. 総合演習①

(オペレーションズリサーチ)

URL: <https://www.kkaneko.jp/cc/or/index.html>

金子邦彦



# アウトライン



## 総合演習を行う

- 待ち行列
- 線形計画法

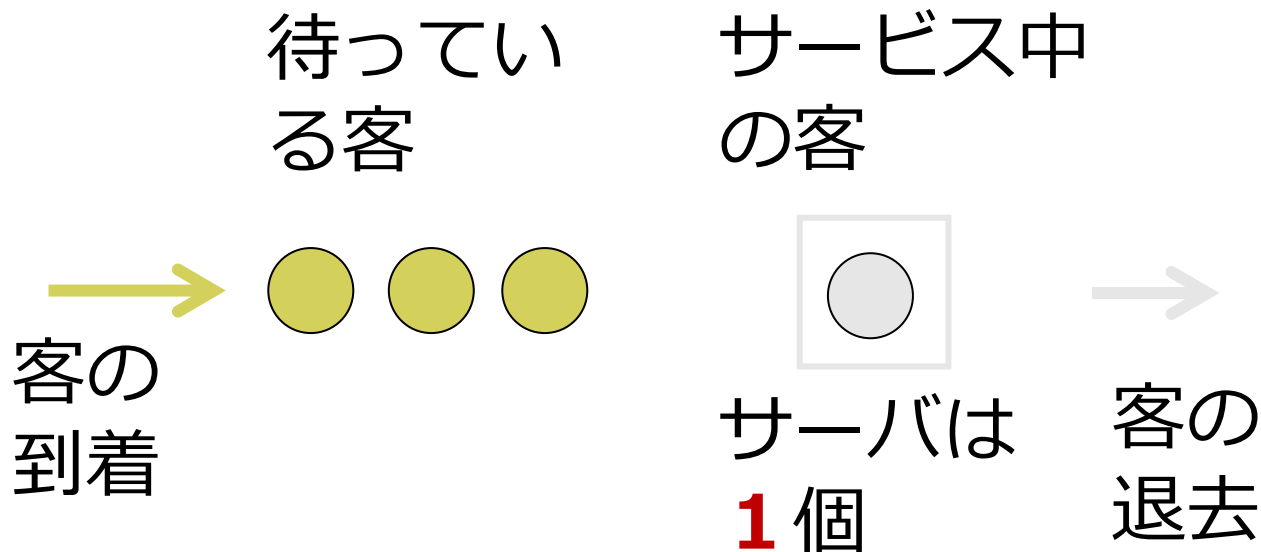
# 14-1. 待ち行列シミュレーション を行うオンラインサイト

# 混雑や滞留の例



- 人  
    窓口, 売り場
- もの  
    車の渋滞, 倉庫への預け入れと取り出し
- 情報  
    インターネットのパケット  
    オペレーティングシステムのプロセス

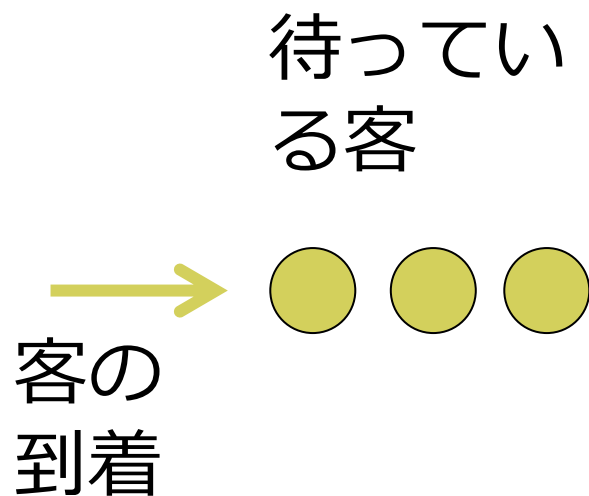
# M/M/1 型の待ち行列



客は**ランダム**  
に到着

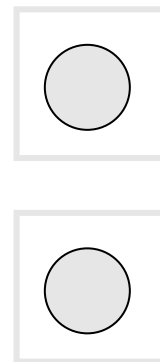
サービスの所要時  
間も**ランダム**

# M/M/2 型の待ち行列



客は**ランダム**  
に到着

サービス中  
の客



サーバは  
**2個**

客の  
退去

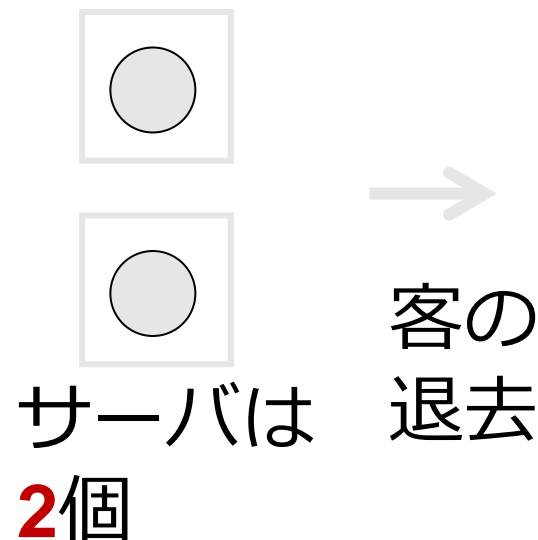
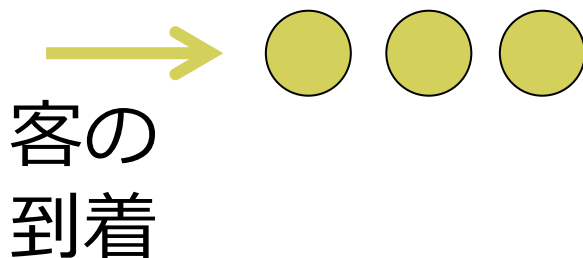
サービスの所要時  
間も**ランダム**

# 今から行う待ち行列シミュレーション

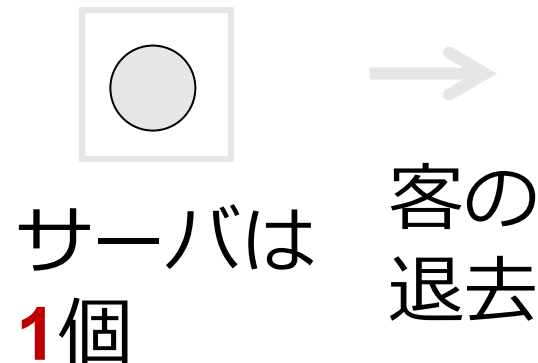
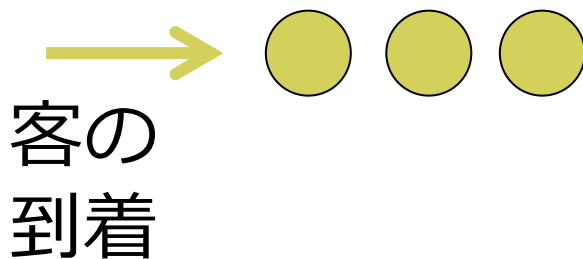


## ① M/M/2 と M/M/1 の比較

M/M/2



M/M/1



# 今から行う待ち行列シミュレーション



② シミュレーションのために、  
**サービス時間の平均，到着間隔の平均を設定する**

## 実データをもとに設定

次の実データでは、  
**サービス時間の平均 97.78**  
**到着間隔の平均 59.54**

| 客番号 | 到着間隔    | サービス時間  | 対数サービス時間 |
|-----|---------|---------|----------|
| 1   | 25      | 40      | 3.6889   |
| 2   | 170     | 37      | 3.6109   |
| 3   | 101     | 168     | 5.1240   |
| 4   | 308     | 58      | 4.0604   |
| 5   | 27      | 89      | 4.4886   |
| 6   | 2       | 52      | 3.9512   |
| 7   | 31      | 60      | 4.0943   |
| 8   | 80      | 59      | 4.0775   |
| 9   | 29      | 133     | 4.8903   |
| 10  | 16      | 42      | 3.7377   |
| 11  | 21      | 113     | 4.7274   |
| 12  | 16      | 27      | 3.2958   |
| 13  | 37      | 60      | 4.0943   |
| 14  | 88      | 190     | 5.2470   |
| 15  | 121     | 72      | 4.2767   |
| 16  | 76      | 58      | 4.0604   |
| 17  | 201     | 48      | 3.8712   |
| ... |         |         |          |
| 50  | 104     | 54      | 3.9890   |
| 平均  | 59.54   | 97.78   | 4.349    |
| 分散  | 4019.41 | 5895.53 | 0.4366   |

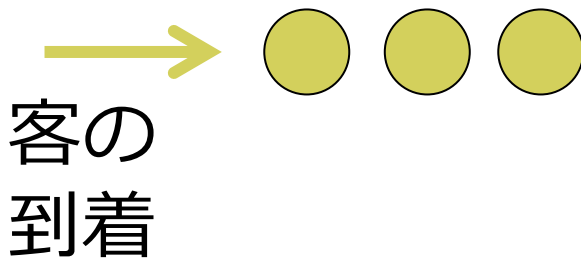
[www.comp.tmu.ac.jp/yamashita/lec/managementscience2015.pptx](http://www.comp.tmu.ac.jp/yamashita/lec/managementscience2015.pptx) より



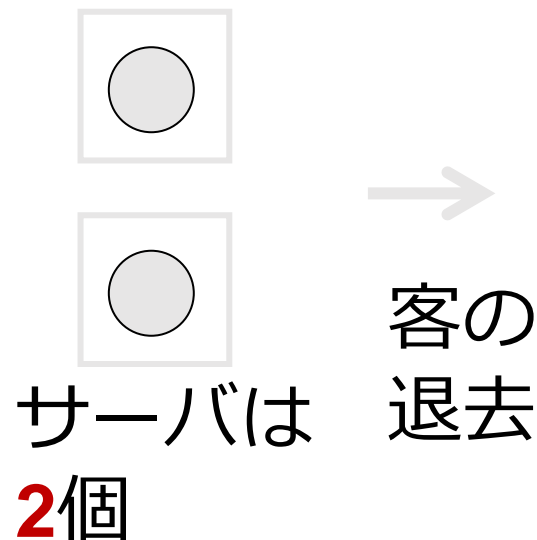
# 今から行う待ち行列シミュレーション



M/M/2

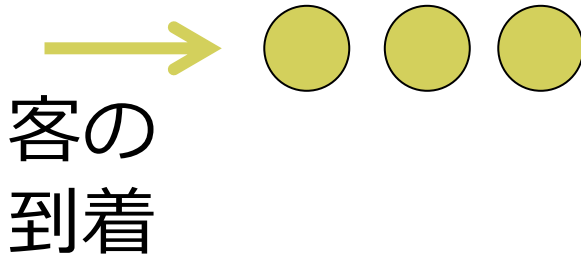


到着間隔の平均 59.54

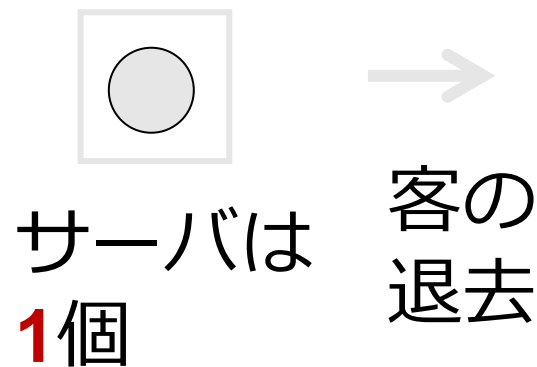


サービス時間の平均 97.78

M/M/1



到着間隔の平均 59.54



サービス時間の平均 48.89  
(2個の場合と比べて, 2倍高速) 9

# 演習



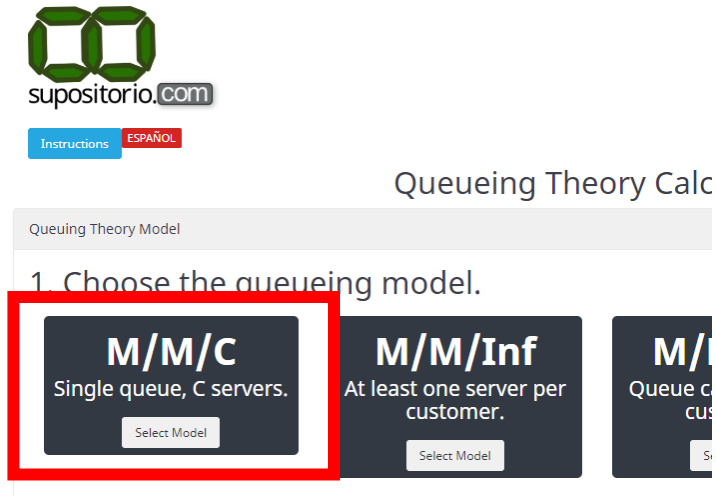
① ウェブブラウザを起動する

**edge を推奨**

② 次の URL を開く

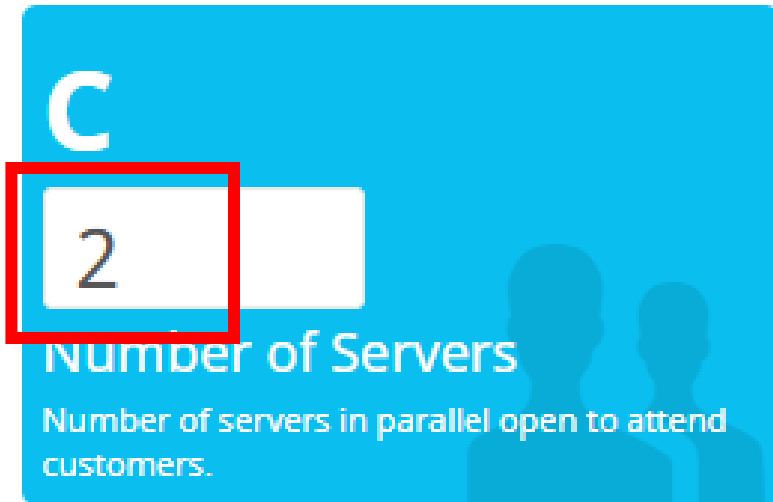
<https://www.supositorio.com/rcalc/rcalclite.htm>

③ 「M/M/C」 をクリック



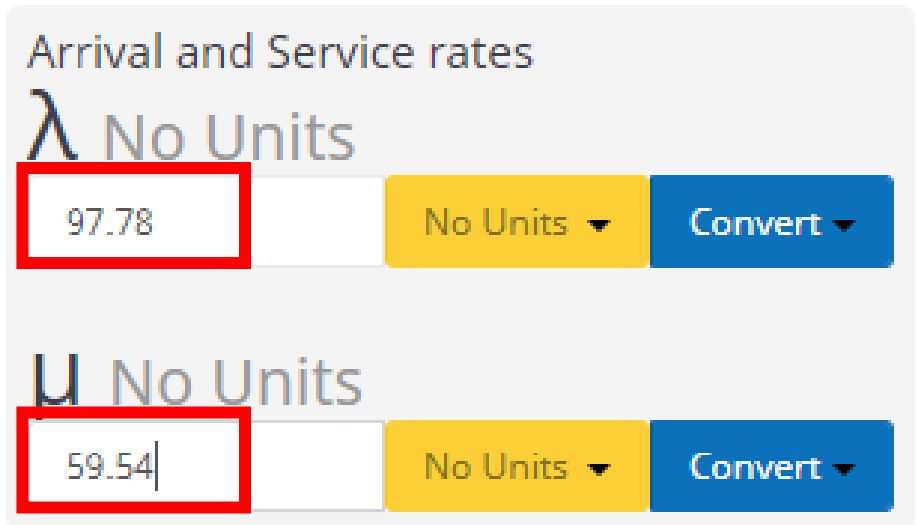
## ④ M/M/2 のシミュレーション. 次のように設定

### 2. Input all the values required.



**C**

サーバは **2** 個



Arrival and Service rates

$\lambda$  No Units

 No Units 

$\mu$  No Units

 No Units 

サービス時間の平均は **97.78**

到着間隔の平均は **59.54**

## ⑤ 「Calculate」 をクリックすると、結果が出る

Calculate

Results

3. See your results.

Display Results in **No Units** and show results with **4 decimals**

|  |  |   |  |
|--|--|---|--|
| <b>5.0415</b><br>Customers<br>L Average<br>Customers in<br>System<br><small>Average number of customers in the system.</small> | <b>3.3992</b><br>Customers<br>Lq Average<br>Customers in<br>Queue<br><small>Average number of customers (entities) in the queue. In other words the expected amount of customers waiting to be served.</small> | <b>0.0516</b> No Units<br>W Average Time<br>Spent in System<br><small>Average time spent by a customer from arrival until fully served.</small> | <b>0.0348</b> No Units<br>Wq Average Time<br>Waiting in Line<br><small>Average time it takes a customer to start being served.</small> |
| <b>0.8211</b><br>$\rho$ Server Utilization<br><small>Percentage of time a server is being utilized by a customer.</small>      | $\lambda'$ Lambda prim<br><small>A value used in some calculations.</small>  | <b>Probabilities</b><br>Discrete<br>P ('n' cust. in system= <input type="text" value="0"/> Cust.)= <b>0.0982</b><br>Time Based                  |  |

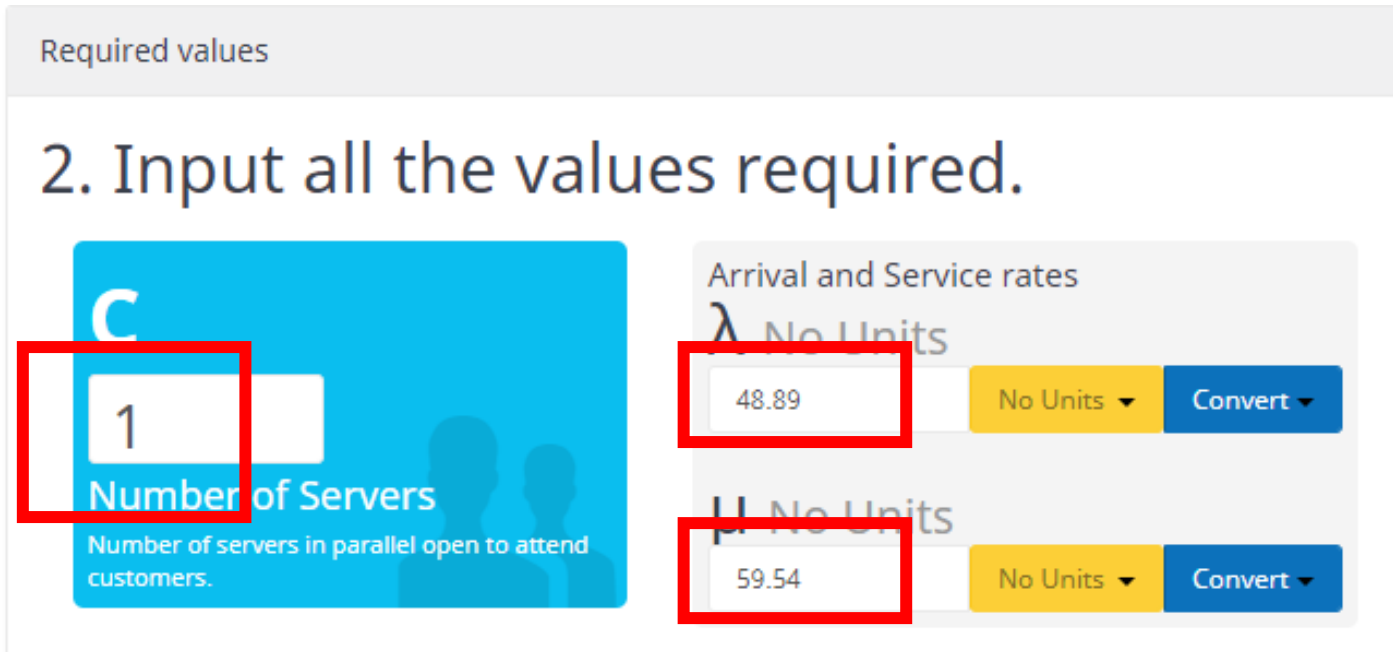
待ち行列の平均長さ

⑥ 今度は、次のように設定  
サーバは **1 個** に。

**サービス時間の平均**は、さっきの**半分**に。

Required values

2. Input all the values required.



| Parameter                  | Value |
|----------------------------|-------|
| Number of Servers          | 1     |
| Arrival rate ( $\lambda$ ) | 48.89 |
| Service rate ( $\mu$ )     | 59.54 |

サーバは **1 個**

サービス時間の平均は **48.89**

到着間隔の平均は **59.54**

## ⑦ 「Calculate」 をクリックすると，結果が出る

Calculate

Results

3. See your results.

Display Results in **No Units** and show results with **4 decimals**

|  |   |  |  |
|--|---|--|--|
| <b>4.5906</b><br>Customers<br>L Average<br>Customers in<br>System<br><small>Average number of customers in the system.</small> | <b>3.7695</b><br>Customers<br>W Average<br>Customers in<br>Queue<br><small>Average number of customers (entities) in the queue. In other words the expected amount of customers waiting to be served.</small> | <b>0.0939</b> No Units<br>W Average Time<br>Spent in System<br><small>Average time spent by a customer from arrival until fully served.</small>  | <b>0.0771</b> No Units<br>Wq Average Time<br>Waiting in Line<br><small>Average time it takes a customer to start being served.</small> |
| <b>0.8211</b><br>$\rho$ Server Utilization<br><small>Percentage of time a server is being utilized by a customer.</small>      | $\lambda'$ Lambda prim<br><small>A value used in some calculations.</small>   | <b>Probabilities</b><br>Discrete<br>P ('n' cust. in system= <input type="text" value="0"/> Cust.)=0.1789<br>Time Based<br>P (time in system <= <input type="text" value="0"/> No Units)=0<br>P (time in queue <= <input type="text" value="0"/> No Units)=0.1789 |  |

待ち行列の平均長さ

# 結果の比較



| サーバの個数 | サービス時間の平均 | 到着間隔の平均 | 待ち行列の平均長さ |
|--------|-----------|---------|-----------|
| 2      | 97.78     | 59.54   | 3.3992    |
| 1      | 48.89     | 59.54   | 3.7695    |

①サーバが2個

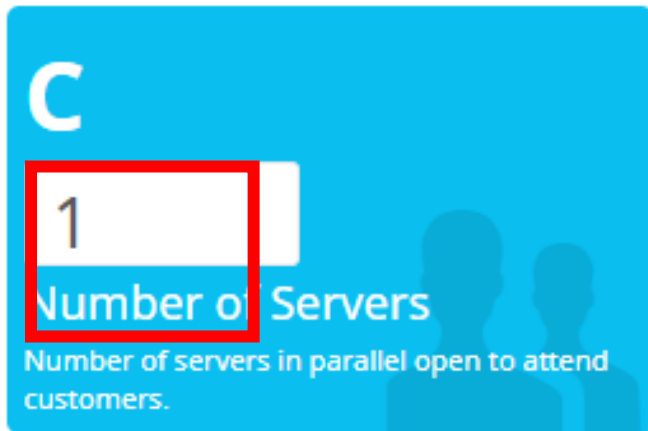
②サーバは1個、性能は2倍

①の方が、待ち行列の平均長さが短い。  
待たせずに済みそう

⑧ 今度は、次のように設定

客が**20%減** (到着間隔は 1.25倍)

2. Input all the values required.

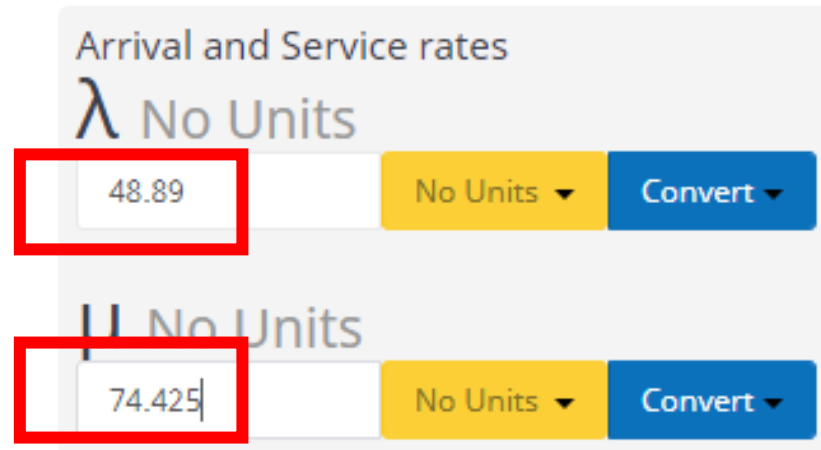


C

1

Number of Servers

Number of servers in parallel open to attend customers.



Arrival and Service rates

$\lambda$  No Units

48.89 No Units Convert

$\mu$  No Units

74.425 No Units Convert

サーバは**1**個

サービス時間の平均は**48.89**

到着間隔の平均は**74.425**



## ⑨ 「Calculate」 をクリックすると，結果が出る

**Calculate**

Results

### 3. See your results.

Display Results in **No Units** and show results with **4 decimals**

**1.9146**  
Customers  
L Average Customers in System  
Average number of customers in the system.

**1.2577**  
Customers  
W Average Customers in Queue  
Average number of customers (entities) in the queue. In other words the expected amount of customers waiting to be served.

**0.0392** No Units  
W Average Time Spent in System  
Average time spent by a customer from arrival until fully served.

**0.0257** No Units  
Wq Average Time Waiting in Line  
Average time it takes a customer to start being served.

**0.6569**  
 $\rho$  Server Utilization  
Percentage of time a server is being utilized by a customer.

$\lambda'$  Lambda prim  
A value used in some calculations.

### Probabilities

Discrete  
P ('n' cust. in system)= Cust.=>0.3431

Time Based  
P (time in system <=  No Units)=0  
P (time in queue <=  No Units)=0.3431

**待ち行列の平均長さ**

# 結果の比較



| サーバの個数 | サービス時間の平均    | 到着間隔の平均       | 待ち行列の平均長さ     |
|--------|--------------|---------------|---------------|
| 2      | 97.78        | 59.54         | 3.3992        |
| 1      | <b>48.89</b> | <b>59.54</b>  | <b>3.7695</b> |
| 1      | <b>48.89</b> | <b>74.425</b> | <b>1.2577</b> |

客が20%減っただけで、待ち行列が約1/3になる

# 14-2. Excel のソルバーと 線形計画法

# Excel のソルバー



- 線形計画法の機能を持つ
- 「変数が整数である」という制約を扱う機能も持つ

# Excel のアプリ版での前準備



- ① Excel で, ファイル, オプション, アドインと操作
- ② Excel アドインで, 「ソルバーアドイン」を選び「設定」

Excel のオプション

Microsoft Office のアドインの表示と管理を行います。

アドイン

| 名前 ^                            | 場所  | 種類         |
|---------------------------------|---|------------|
| <b>アクティブなアプリケーション アドイン</b>      |   |            |
| 分析ツール                           | C:\...ice¥root¥Office16¥Library¥Analysis¥ANALYS32.XLL   | Excel アドイン |
| <b>アクティブでないアプリケーション アドイン</b>    |   |            |
| Euro Currency Tools             | C:\...oft Office¥root¥Office16¥Library¥EUROTOOL.XLAM    | Excel アドイン |
| Inquire                         | C:\...86)¥Microsoft Office¥Office16¥DCF¥NativeShim.dll  | COM アドイン   |
| Microsoft Actions Pane 3        |   | XML 拡張パック  |
| Microsoft Power Map for Excel   | C:\...Power Map Excel Add-in¥EXCELPLUGINSHELL.DLL       | COM アドイン   |
| Microsoft Power Pivot for Excel | C:\...Pivot Excel Add-in¥PowerPivotExcelClientAddIn.dll | COM アドイン   |
| Microsoft Power View for Excel  | C:\...r View Excel Add-in¥AdHocReportingExcelClient.dll | COM アドイン   |
| <b>ソルバー アドイン</b>                | C:\...ice¥root¥Office16¥Library¥SOLVER¥SOLVER.XLAM      | Excel アドイン |
| 口付 (XML)                        | C:\...on Files¥Microsoft Shared¥Smart Tag¥MOFL.DLL      | 操作         |
| 分析ツール - VBA                     | C:\...¥root¥Office16¥Library¥Analysis¥ATPVBAEN.XLAM     | Excel アドイン |

ドキュメント関連アドイン  
ドキュメント関連アドインはありません

無効なアプリケーション アドイン  
無効なアプリケーション アドインはありません

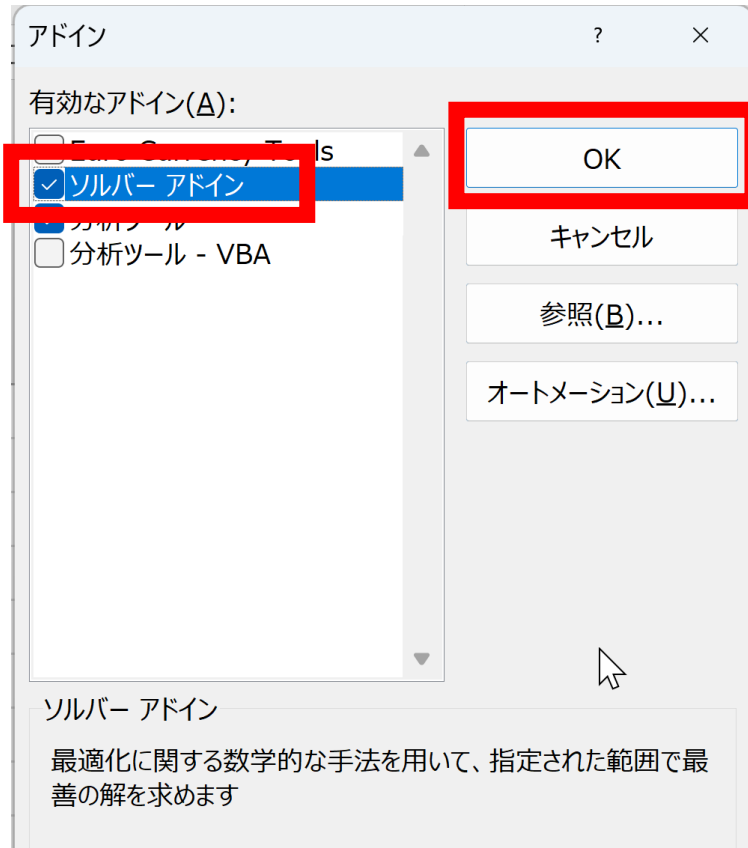
アドイン: ソルバー アドイン  
発行者:  
互換性: 互換性に関する情報はありません  
場所: C:\Program Files¥Microsoft Office¥root¥Office16¥Library¥SOLVER¥SOLVER.XLAM

説明: 最適化に関する数学的な手法を用いて、指定された範囲で最善の解を求めます

管理(A): Excel アドイン 設定(G)...

OK キャンセル

### ③ 「ソルバーアドイン」をチェックし「OK」



## 線形計画法の例題

- 変数  $x$  と  $y$  ( $x$  と  $y$  は整数である)
- 制約

$$3x + y \leq 10$$

$$x + 2y \leq 4$$

一次式

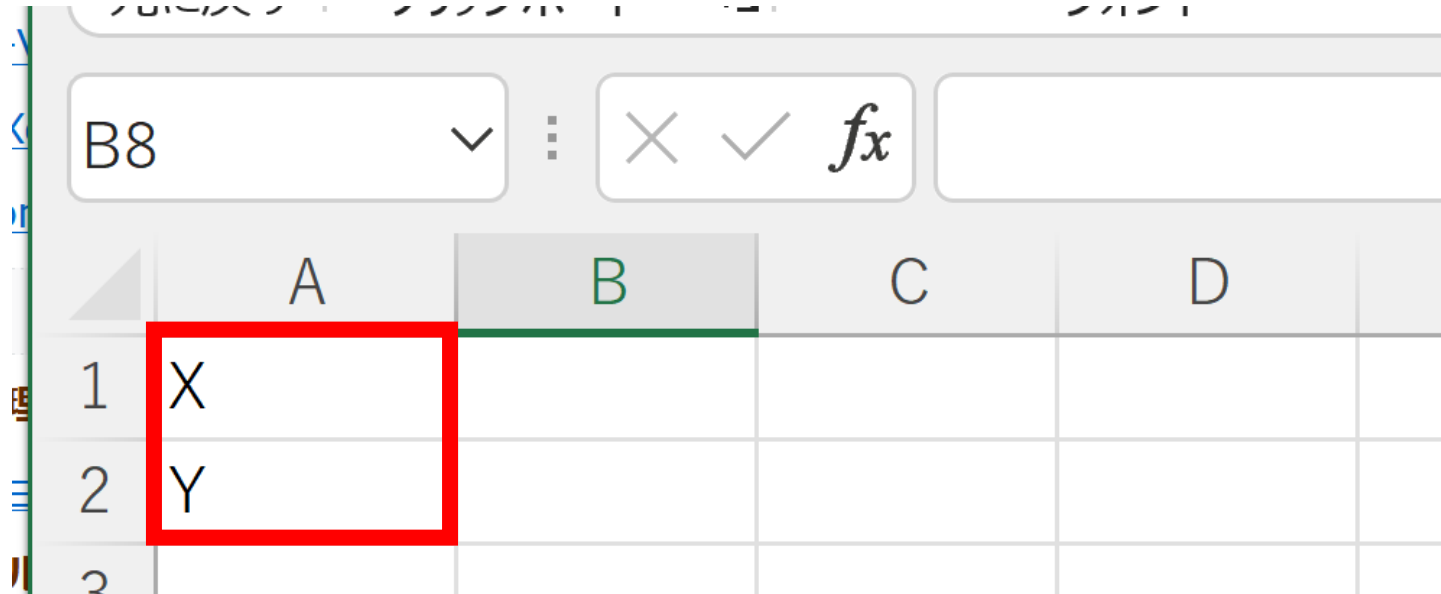
これら制約のもとで

**$x + y$  の最大値**

はいくらか？

# 演習

- ① **変数の個数は 2個 (2変数)** なので  
→ 2行使う。  
分かりやすくするために  
**A1 と A2 に, 変数名 X, Y を書く**



|   | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | X |   |   |   |
| 2 | Y |   |   |   |



## ② セル C1, C2, D1, D2, E1, E2 に値を書く

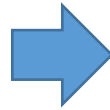
### 制約式

$$3x + y \leq 10$$

$$x + 2y \leq 4$$

### 目的

$x + y$  の最大化

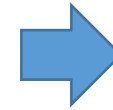


$$3x + 1y$$

$$1x + 2y$$

$$1x + 1y$$

1を補う



|   | $x$ | $y$ |
|---|-----|-----|
| 3 | 1   |     |
| 1 | 2   |     |
| 1 | 1   |     |

縦横入れ替え



|   |   | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | X |   |   | 3 | 1 | 1 |
| 2 | Y |   |   | 1 | 2 | 1 |
| 3 |   |   |   |   |   |   |

③ セル **C3** に次の式を書く  
変数の個数は 2個 (2変数) である

=SUMPRODUCT(**C1:C2**, \$B1:\$B**2**)

|   | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | X |   | 3 |
| 2 | Y |   | 1 |
| 3 |   |   | 0 |

**$3x + 1y$**

になる予定

④ セル C3 の式を, D3, E3 に「コピー&貼り付け」する。 右クリックメニューが便利

その結果, 次のようになる

セル D3: =SUMPRODUCT(D1:D2, \$B1:\$B2)

セル E3: =SUMPRODUCT(E1:E2, \$B1:\$B2)

|   | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | X |   | 3 | 1 | 1 |
| 2 | Y |   | 1 | 2 | 1 |
| 3 |   |   | 0 | 0 | 0 |
| 4 |   |   |   |   |   |

$$1x + 2y$$

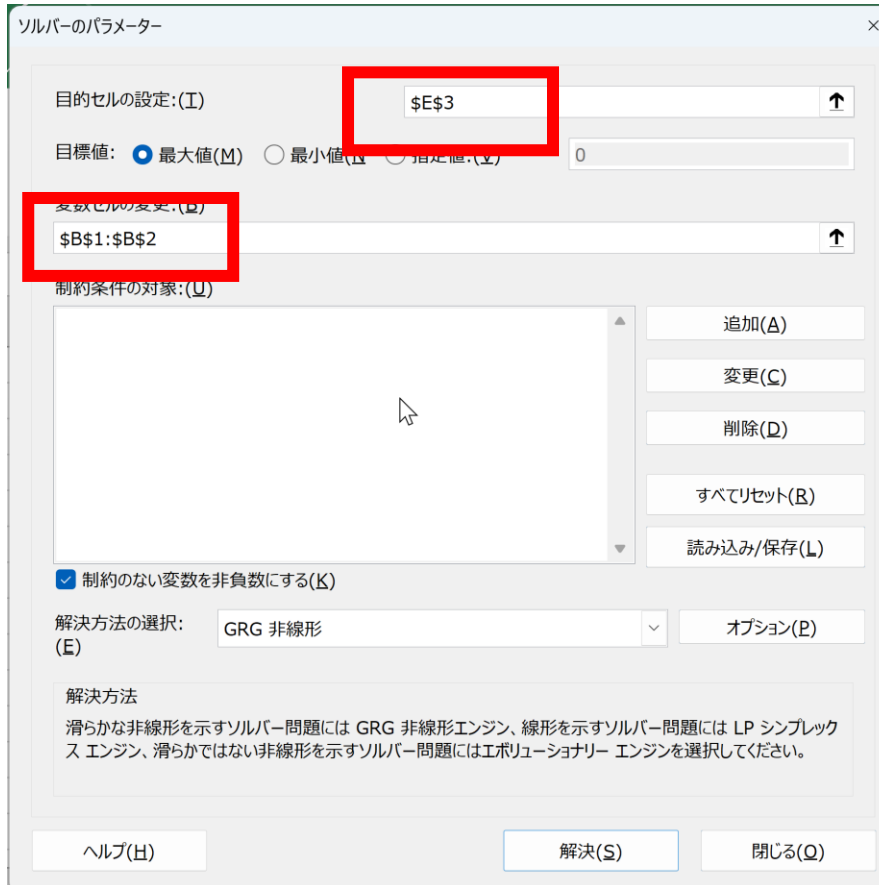
になる予定

$$1x + 1y$$

になる予定

## ⑤ Excel で線形計画法の設定を開始

- セル B1 から B2 を範囲選択してから、
- 「データ」 → 「ソルバー」 と操作
- まず、次のように設定。



ソルバーのパラメーター

目的セルの設定:(I)

目標値:  最大値(M)  最小値(M)  指定値:(V)

変数セルの変更:(J)

制約条件の対象:(L)

制約のない変数を非負数にする(K)

解決方法の選択:(E)  オプション(P)

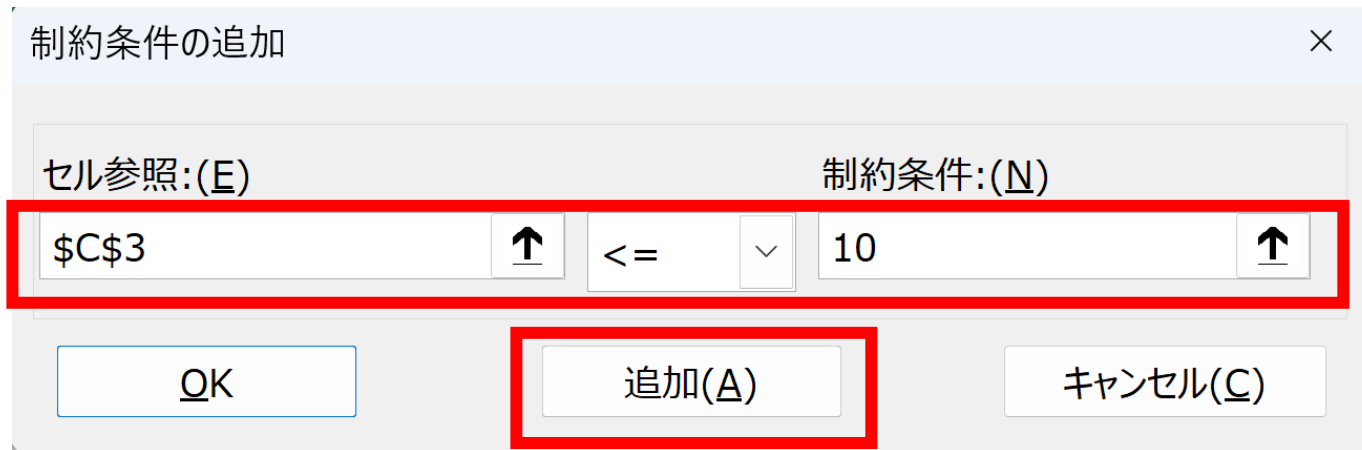
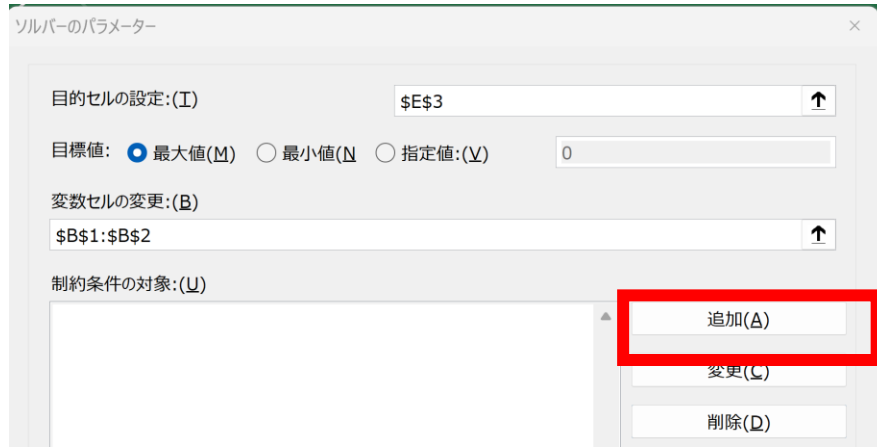
解決方法  
滑らかな非線形を示すソルバー問題には GRG 非線形エンジン、線形を示すソルバー問題には LP シンプレックス エンジン、滑らかではない非線形を示すソルバー問題にはエボリュショナリー エンジンを選択してください。

ヘルプ(H) 解決(S) 閉じる(Q)

\$E\$3

\$B\$1:\$B\$2

⑥ 「追加」をクリック。  $3x + y \leq 10$  についての制約条件を追加。「追加」をクリック。



$\$C\$3 \leq 10$

「追加」をクリック

制約式

$$3x + y \leq 10$$

⑦  $x + 2y \leq 4$  についての

制約条件を追加。「追加」をクリック。

制約条件の追加 ×

| セル参照:(E) |   | 制約条件:(N) |
|----------|---|----------|
| \$D\$3   | ↑ | $\leq$ 4 |

OK      追加(A)      キャンセル(C)

$\$D\$3 \leq 4$

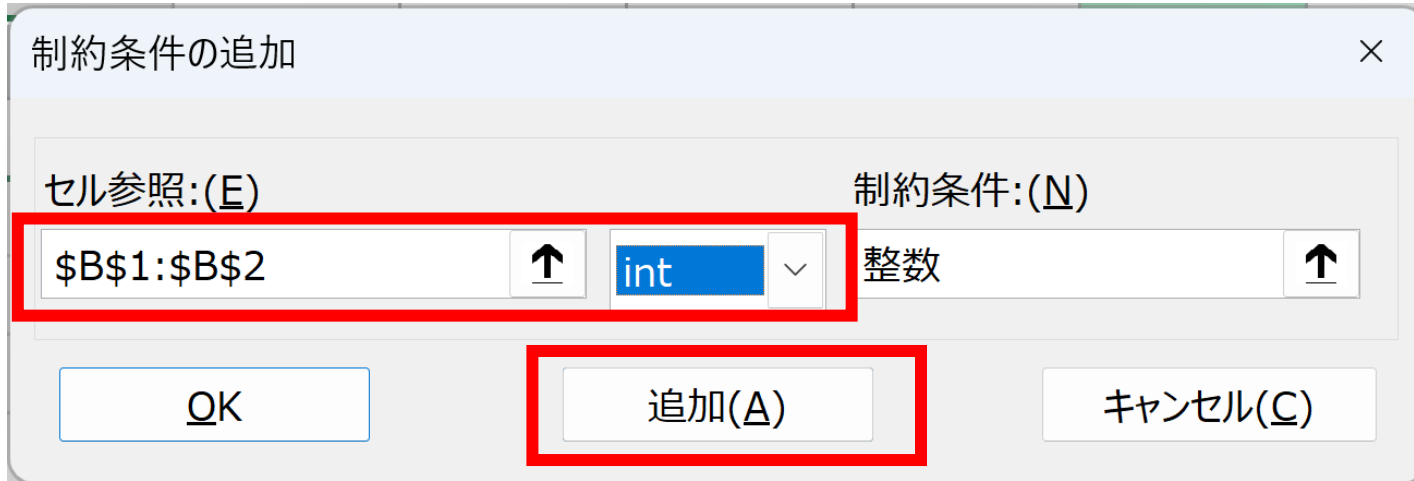
「追加」をクリック

制約式

$$x + 2y \leq 4$$

⑧  $x, y$  は整数であるという

制約条件を追加. 「追加」をクリック.



制約条件の追加

セル参照:(E)      制約条件:(N)

\$B\$1:\$B\$2    ↑    int    ↓    整数    ↑

OK      追加(A)      キャンセル(C)

\$B\$1:\$B\$2  
int

「追加」をクリック

⑨ 制約条件の追加を終わる。「キャンセル」をクリック。



制約条件の追加 ×

セル参照:(E)      制約条件:(N)

↑      <=      ↓       ↑

OK      追加(A)      **キャンセル(C)**

「キャンセル」をクリック



# ⑩ 「解決」をクリック。

ソルバーのパラメーター

×

目的セルの設定:(I)  ↑

目標値:  最大値(M)  最小値(N)  指定値:(V)

変数セルの変更:(B)  ↑

制約条件の対象:(U)

追加(A)  
変更(C)  
削除(D)  
すべてリセット(R)  
読み込み/保存(L)

制約のない変数を非負数にする(K)

解決方法の選択:  ↓ オプション(P)

(E)

解決方法  
滑らかな非線形を示すソルバー問題には GRG 非線形エンジン、線形を示すソルバー問題には LP シンプレックスエンジン、滑らかではない非線形を示すソルバー問題にはエボリューションナリー エンジンを選択してください。

ヘルプ(H) **解決(S)** 閉じる(O)

## ⑪ 結果を確認

- 変数  $x$  と  $y$  ( $x$  と  $y$  は整数である)
- 制約

$$3x + y \leq 10$$

$$x + 2y \leq 4$$

これら制約のもとで

**$x + y$  の最大値は 3**

|   | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | X | 2 | 3 | 1 | 1 |
| 2 | Y | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 3 |   |   | 7 | 4 | 3 |

## 14-3. 変数の数が 3 の場合

## 線形計画法の例題

- 変数  $X$  と  $Y$  と  $Z$  ( $X$  と  $Y$  と  $Z$  は整数である)

- 制約式

$$2X + 3Y + 4Z \leq 20$$

$$3X + 4Y + 2Z \leq 25$$

$$5X + 2Y + 2Z \leq 24$$

- これら制約のもとで

**$X + Y + Z$  の最大値**

はいくらか？

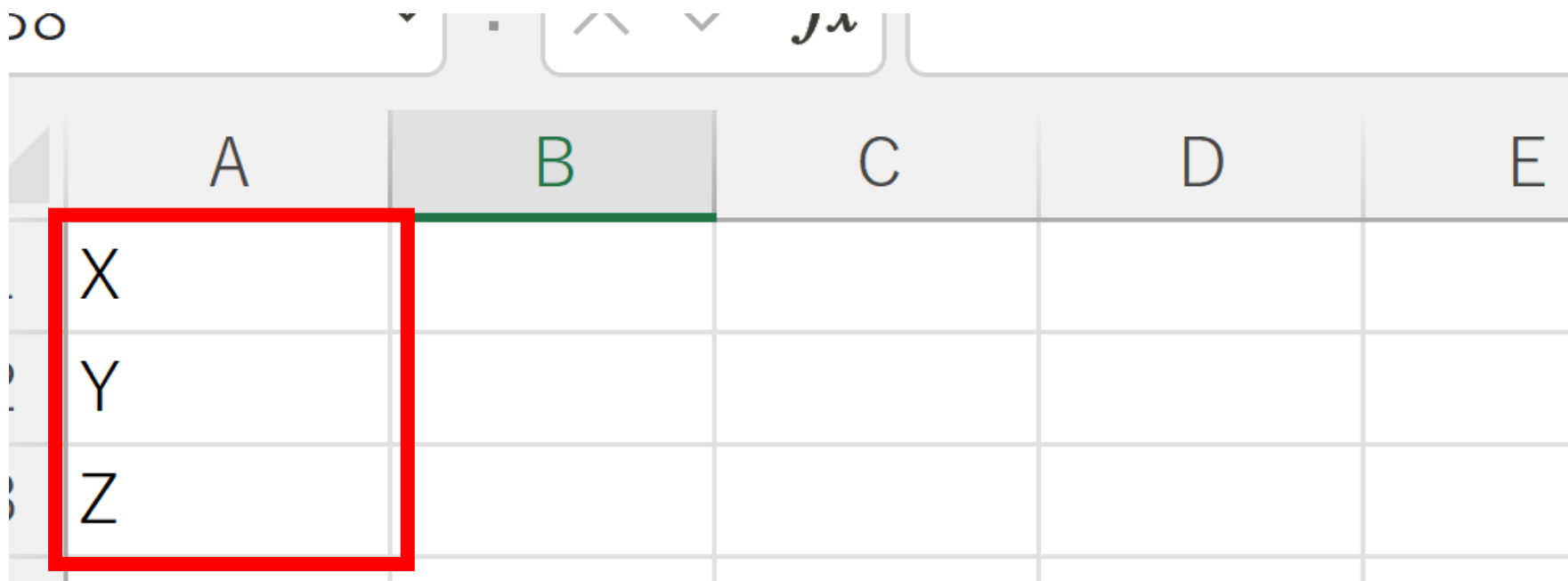
# 演習

① **変数の個数は 3個 (3変数)** なので

→ 3行使う.

分かりやすくするために

**A1 と A2 と A3 に, 変数名 X, Y, Z を書く**



|   | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | X |   |   |   |   |
| 2 | Y |   |   |   |   |
| 3 | Z |   |   |   |   |

## ② 次のように値を書く

### 制約式

$$2X + 3Y + 4Z \leq 20$$

$$3X + 4Y + 2Z \leq 25$$

$$5X + 2Y + 2Z \leq 24$$

### 目的

$X + Y + Z$  の最大化



$$2X + 3Y + 4Z$$

$$3X + 4Y + 2Z$$

$$5X + 2Y + 2Z$$

$$1X + 1Y + 1Z$$

1を補う



|   | X | Y | Z |
|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 |   |
| 3 | 4 | 2 |   |
| 5 | 2 | 2 |   |
| 1 | 1 | 1 |   |



縦横入れ替え

|   | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | X |   | 2 | 3 | 5 | 1 |
| 2 | Y |   | 3 | 4 | 2 | 1 |
| 3 | Z |   | 4 | 2 | 2 | 1 |

③ セル **C4** に次の式を書く  
変数の個数は 3個 (3変数) である

=SUMPRODUCT(**C1:C3**, \$B1:\$B**3**)

|   | A | B | C | D | 数式バー<br>E | F |
|---|---|---|---|---|-----------|---|
| 1 | X |   | 2 | 3 | 5         | 1 |
| 2 | Y |   | 3 | 4 | 2         | 1 |
| 3 | Z |   | 4 | 2 | 2         | 1 |
| 4 |   |   | 0 |   |           |   |

④ セル **C4** の式を, **D4, E4, F4** に「コピー&貼り付け」する。 右クリックメニューが便利

その結果, 次のようになる

セル **D4**: =SUMPRODUCT(**D1:D3**, \$B1:\$B3)

セル **E4**: =SUMPRODUCT(**E1:E3**, \$B1:\$B3)

セル **F4**: =SUMPRODUCT(**F1:F3**, \$B1:\$B3)

|   | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | X |   | 2 | 3 | 5 | 1 |
| 2 | Y |   | 3 | 4 | 2 | 1 |
| 3 | Z |   | 4 | 2 | 2 | 1 |
| 4 |   |   | 0 | 0 | 0 | 0 |



⑤ セル B1 から B3 を範囲選択してから、  
「データ」→「ソルバー」と操作し次のように  
設定。「解決」をクリック

目的セルの設定:(I)  ↑

目標値:  最大値(M)  最小値(N)  指定値:(V)

変数セルの変更:(B)  ↑

制約条件の対象:(U)

追加(A)  
変更(C)

# 線形計画法の例題



## ⑥ 結果の確認

- X と Y と Z は整数である

- 制約式

$$2X + 3Y + 4Z \leq 20$$

$$3X + 4Y + 2Z \leq 25$$

$$5X + 2Y + 2Z \leq 24$$

- これら制約のもとで

**X + Y + Z の最大値は 7**

**(X=2, Y=2, Z=1 のとき)**

|   | A | B | C  | D  | E  | F |
|---|---|---|----|----|----|---|
| 1 | X | 2 | 2  | 3  | 5  | 1 |
| 2 | Y | 4 | 3  | 4  | 2  | 1 |
| 3 | Z | 1 | 4  | 2  | 2  | 1 |
| 4 |   |   | 20 | 24 | 20 | 7 |

# 14-4. 線形計画法の演習問題

## 線形計画法の例題

- あるレストランの手持ちの材料

ひきにく **3800**

玉ねぎ **2100**

ケチャップ **1200**

- ハンバーグとオムレツに必要な材料

ハンバーグ 1 個あたり

ひきにく **60**, 玉ねぎ **20**, ケチャップ **20**

オムレツ 1 個あたり

ひきにく **40**, 玉ねぎ **30**, ケチャップ **10**

- ハンバーグは **400**円, オムレツは **300**円である. 売り上げを最大にしたい

# 線形計画法の例題 1

- 変数  $X$  と  $Y$  (**2変数**)
- 制約式

$$60X + 40Y \leq 3800$$

$$20X + 30Y \leq 2100$$

$$20X + 10Y \leq 1200$$

- これら制約のもとで

**$400X + 300Y$  の最大値**

はいくらか？

$X=30, Y=50$  のとき  
最大 27000

|   | A | B  | C    | D    | E    | F     |  |
|---|---|----|------|------|------|-------|--|
| 1 | X | 30 | 60   | 20   | 20   | 400   |  |
| 2 | Y | 50 | 40   | 30   | 10   | 300   |  |
| 3 |   |    | 3800 | 2100 | 1100 | 27000 |  |
| 4 |   |    |      |      |      |       |  |

## 線形計画法の例題 2

- ある工場の手持ちの材料

ねじ **36**

板 **12**

- 机と椅子に必要な材料

机 1 つあたり

ねじ **6**, 板 **1**

椅子 1 つあたり

ねじ **3**, 板 **2**

- 机は **4**万円, 椅子は **3**万円である. 売り上げを最大にしたい

## 線形計画法の例題 2

- 変数  $X$  と  $Y$  (**2変数**)
- 制約式

$$6X + 3Y \leq 36$$

$$X + 2Y \leq 12$$

- これら制約のもとで

**40000  $X$  + 30000  $Y$  の最大値**

はいくらか？

$X=4, Y=4$  のとき

最大値 280000

|   | A | B | C  | D  | E      |
|---|---|---|----|----|--------|
| 1 | X | 4 | 6  | 1  | 40000  |
| 2 | Y | 4 | 3  | 2  | 30000  |
| 3 |   |   | 36 | 12 | 280000 |