

sp-12. 再帰と繰り返しの回数

(Scheme プログラミング)

URL: <https://www.kkaneko.jp/pro/scheme/index.html>

金子邦彦



アウトライン

12-1 繰り返し計算

12-2 パソコン演習

12-3 課題



- 再帰を使った，繰り返し計算
- 数学の「再帰的定義」と，Schemeプログラムの関係
- 繰り返し回数
 - 関数は「何回繰り返し返して」実行されるか

12-1 繰り返し計算

繰り返しの例



- 階乗
 - 「 $n - 1$ の階乗」に n を足すことを繰り返す
- ユークリッドの互助法
 - m と n の最大公約数を求めるために、「割った余りを求めること」を、余りが 0 になるまで繰り返す

12- 2 パソコン演習

パソコン演習の進め方



- 資料を見ながら、「例題」を行ってみる
- 各自、「課題」に挑戦する
- 自分のペースで先に進んで構いません

- DrScheme の起動
プログラム → PLT Scheme → DrScheme
- 今日の演習では「Intermediate Student」
に設定
Language
→ Choose Language
→ Intermediate Student
→ Execute ボタン

例題 1. 階乗



- 階乗を計算する関数 **!** を作り, 実行する
 - 次の方針でプログラムを作成する
 $n > 0$ のとき, $n! = n \times (n-1)!$

例) $6! = 6 \times 5!$

- $n = 0$ のとき

$$n! = 1$$

- $n > 0$ のとき

$$n! = n \times (n - 1)!$$

「例題 1. 階乗」の手順

1. 次を「定義用ウィンドウ」で、実行しなさい
 - 入力した後に、Execute ボタンを押す

```
;;! : number -> number
;;to compute n*(n-1)*...*2*1
(define (! n)
  (cond
    [(= n 0) 1]
    [else (* n (! (- n 1)))]))
```

2. その後、次を「実行用ウィンドウ」で実行しなさい

```
(! 3)
(! 4)
```

「例題 1. 階乗」の実行結果



The screenshot shows the DrScheme IDE window titled "Untitled - DrScheme". The menu bar includes "File", "Edit", "Windows", "Show", "Language", "Scheme", and "Help". The toolbar contains buttons for "Untitled", "Save", "Check Syntax", "Step", "Execute", and "Break".

```
(define (! n)
  (cond
    [(= n 0) 1]
    [else (* n (! (- n 1)))]))
```

The execution results are shown below the code:

```
> (! 3)
6
> (! 4)
24
```

The status bar at the bottom indicates the current position is 7:3, the window is Unlocked, and the program is not running.

```
Untitled - DrScheme
File Edit Windows Show Language Scheme Help
Untitled Save Check Syntax Step Execute Break
(define ...)
;; ! : number -> number
;; to compute n*(n-1)*...*2*1
;; Example: (! 4) = 24
(define (! n)
  (cond
    [(= n 0) 1]
    [else (* n (! (- n 1)))]))
>
```

まず、Scheme のプログラムを
コンピュータに読み込ませている



これは,
 (! 4)
 と書いて, n の値を
 4 に設定しての実行

```
;; ! : number
;; to compute factorial
;; Example
(define (! n)
  (cond
    [(= n 0) 1]
    [else (* n (! (- n 1)))]))
```

> (! 4)

24

> (! 10)

3628800

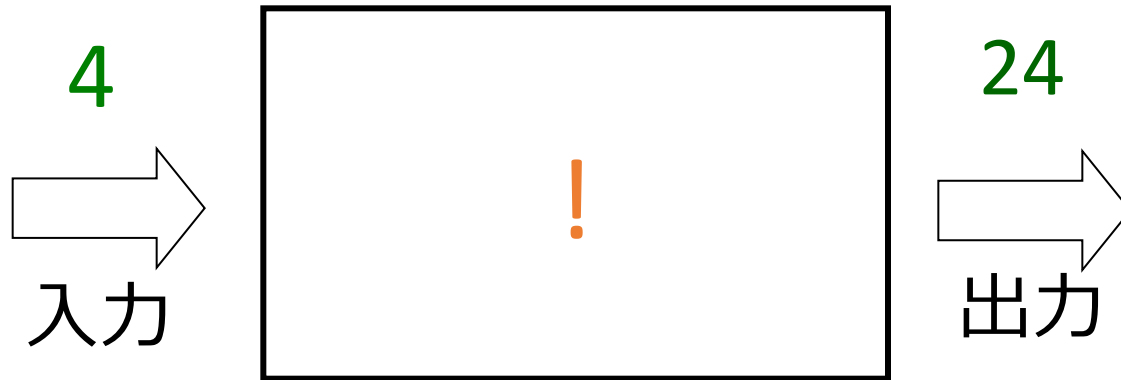
> (! 20)

2432902008176640000

実行結果である「24」が
 表示される



入力と出力



入力は数値

出力は数値

! 関数



;; ! : number -> number

;; to compute $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$

;; Example: $(! 4) = 24$

```
(define (! n)
```

```
(cond
```

0! = 1 である

```
[(= n 0) 1]
```

```
[else (* n (! (- n 1)))]))
```

$n!$ は $(n-1)!$ を計算して, n を掛ける

1. $n = 0$ ならば :
 - 終了条件
 - 1 → 自明な解

2. そうで無ければ :

- 「 $n - 1$ の階乗」に n をかける

⇒ 結局, 1 から n までのかけ算を繰り返す

```
:: ! : number -> number
```

```
:: to compute  $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ 
```

```
:: (! 4) = 24
```

```
(define (! n)
```

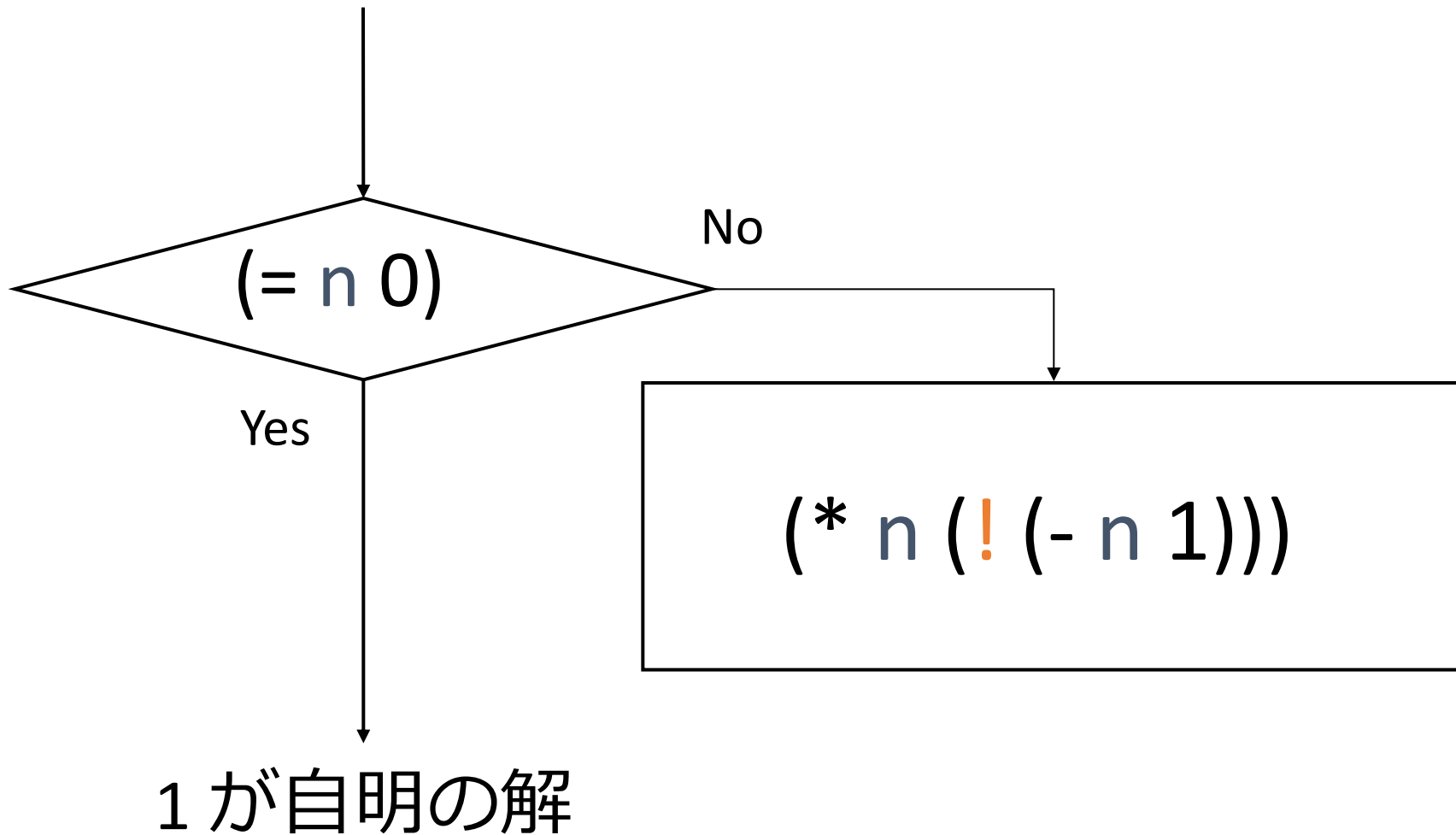
```
  (cond
```

終了条件

```
    [(= n 0) 1] 自明な解
```

```
    [else (* n (! (- n 1)))]))
```

終了条件



- ! の内部に ! が登場

```
(define (! n)
  (cond
    [(= n 0) 1]
    [else (* n (! (- n 1)))]))
```

- ! の実行が繰り返される

例 : $(! 5) = (* 5 (! 4))$

$(! 4) = (* 4 (! 3))$

例題 2. ステップ実行

- 関数 `!` (例題 1) について, 実行結果に至る過程を見る
 - `(! 3)` から 6 に至る過程を見る
 - DrScheme の stepper を使用する

```
(define (! n)
  (cond
    [(= n 0) 1]
    [else (* n (! (- n 1)))]))
```

```
(! 3)
=
=  $\dots$ 
= (* 3 (! 2))
=  $\dots$ 
= (* 3 (* 2 (! 1)))
=  $\dots$ 
= (* 3 (* 2 (* 1 (! 0))))
=  $\dots$ 
= (* 3 (* 2 (* 1 1)))
= (* 3 (* 2 1))
= (* 3 2)
= 6
```

「例題 2. ステップ実行」の手順

1. 次を「定義用ウィンドウ」で、実行しないで
 - Intermediate Student で実行すること
 - 入力した後に、Execute ボタンを押す

```
;;! : number -> number
;;to compute n*(n-1)*...*2*1
(define (! n)
  (cond
    [(= n 0) 1]
    [else (* n (! (- n 1)))]))
(! 3)
```

← 例題 1 と同じ

2. DrScheme を使って、ステップ実行の様子を確認しないで (Step ボタン, Next ボタンを使用)
 - 理解しながら進むこと

☆ 次は、例題 3 に進んでください

Home

<< Previous

Next >>

```
(define (! n)
  (cond
    ((= n 0) 1)
    (else (* n (! (- n 1))))))
```

```
(! 3)
```

```
(cond
  ((= 3 0) 1)
  (else
   (*
    3
    (! (- 3 1)))))
```

!の「n」は「3」で置き換わる

```
(define (! n)
  (cond
    ((= n 0) 1)
    (else (* n (! (- n 1))))))
```

```
(cond
  (= 3 0) 1)
(else
  (*
    3
    (! (- 3 1))))))
```

→

```
(cond
  (false 1)
  (else
    (*
      3
      (! (- 3 1))))))
```

「(= 3 0)」は「false」で
置き換わる

Home

<< Previous

Next >>

```
(define (! n)
  (cond
    ((= n 0) 1)
    (else (* n (! (- n 1))))))
```

```
(cond
  (false 1)
  (else
    (*
      3
      (! (- 3 1))))))
```

→

```
(* 3 (! (- 3 1)))
```

「(cond [false 式 X] [else 式 Y])」は
「式 Y」で置き換わる

Home

<< Previous

Next >>

```
(define (! n)
  (cond
    ((= n 0) 1)
    (else (* n (! (- n 1))))))
```

```
(* 3 (! (- 3 1))) → (* 3 (! 2))
```

「(- 3 1)」は, 「2」で
置き換わる

```
(define (! n)
  (cond
    ((= n 0) 1)
    (else (* n (! (- n 1))))))
```

```
(* 3 (! 2))
```

```
(*
  3
```

```
  (cond
    ((= 2 0) 1)
    (else
     (*
      2
      (! (- 2 1))))))
```

!の「n」は「2」で置き換わる

```
(define (! n)
  (cond
    ((= n 0) 1)
    (else (* n (! (- n 1))))))
```

```
(*
  3
  (cond
    ((= 2 0) 1)
    (else
     (*
      2
      (! (- 2 1))))))
```


→

```
(*
  3
  (cond
    (false 1)
    (else
     (*
      2
      (! (- 2 1))))))
```

「(= 2 0)」は「false」で
置き換わる

```
(define (! n)
  (cond
    ((= n 0) 1)
    (else (* n (! (- n 1))))))
```

```
(*
  3
  (cond
    (false 1)
    (else
     (*
      2
      (! (- 2 1))))))
```



```
(*
  3
  (* 2 (! (- 2 1))))
```

「(cond [false 式 X] [else 式 Y])」は
「式 Y」で置き換わる

```
(define (! n)
  (cond
    ((= n 0) 1)
    (else (* n (! (- n 1))))))
```

```
(* 3 (* 2 (! 1)))
3
(* 2 (! (- 2 1)))
```

「(- 2 1)」は, 「1」で
置き換わる

```
(define (! n)
  (cond
    ((= n 0) 1)
    (else (* n (! (- n 1))))))
```


```
(* 3 (* 2 (! 1)))
```

```
(*
  3
  (*
    2
    (cond
      ((= 1 0) 1)
      (else
        (*
          1
          (! (- 1 1)))))))
```

!の「n」は「1」で置き換わる

```
(define (! n)
  (cond
    ((= n 0) 1)
    (else (* n (! (- n 1)))))
```

```
(*
  3
  (*
    2
    (cond
      ((= 1 0) 1)
      (else
       (*
         1
         (! (- 1 1)))))
```



```
      (false 1)
      (else
       (*
         1
         (! (- 1 1)))))
```

「(= 1 0)」は「false」で
置き換わる


```
(define (! n)
  (cond
    ((= n 0) 1)
    (else (* n (! (- n 1)))))
```

```
(*
  3
  (*
    2
    (cond
      (false 1)
      (else
        (*
          1
          (! (- 1 1)))))
```



```
(*
  3
  (*
    2
    (* 1 (! (- 1 1)))))
```

「(cond [false 式 X] [else 式 Y])」は
「式 Y」で置き換わる

```
(define (! n)
  (cond
    ((= n 0) 1)
    (else (* n (! (- n 1)))))
```

```
(*
  3
  (*
    2
    (* 1 (! (- 1 1)))))
```

→

```
(*
  3
  (* 2 (* 1 (! 0))))
```

「(- 1 1)」は, 「0」で
置き換わる

```
(define (! n)
  (cond
    ((= n 0) 1)
    (else (* n (! (- n 1))))))
```

```
(*
 3
 (* 2 (* 1 (! 0))))
```

```
(*
 3
 (*
 2
 (*
 1
 (cond
  ((= 0 0) 1)
  (else
   (*
    0
    (!
     (- 0 1)))))))))
```



!の「n」は「1」で置き換わる

```
(define (! n)
  (cond
    ((= n 0) 1)
    (else (* n (! (- n 1))))))
```

```
(*
  3
  (*
    2
    (*
      1
      (cond
        ((= 0 0) 1)
        (else
         (*
           0
           (!
            (- 0 1)
            )))))))
```

→

```
(*
  3
  (*
    2
    (*
      1
      (cond
        (true 1)
        (else
         (*
           0
           (!
            (- 0 1)
            )))))))
```

「(= 0 0)」は「true」で
置き換わる

```
(define (! n)
  (cond
    ((= n 0) 1)
    (else (* n (! (- n 1))))))
```

```
(* 3 (* 2 (* 1 1)))
```

```
3
```

```
(*
```

```
2
```

```
(*
```

```
1
```

```
(cond
```

```
(true 1)
```

```
(else
```

```
(*
```

```
0
```

```
(!
```

```
(- 0 1))))))
```

「(cond [true 式 X] [else 式 Y])」は
「式 X」で置き換わる

```
(define (! n)
  (cond
    ((= n 0) 1)
    (else (* n (! (- n 1)))))
```

```
(* 3 (* 2 (* 1 1))) → (* 3 (* 2 1))
```

「(* 1 1)」は, 「1」で
置き換わる

```
(define (! n)
  (cond
    ((= n 0) 1)
    (else (* n (! (- n 1))))))
```

```
(* 3 (* 2 1))      → (* 3 2)
```

「(* 2 1)」は、「2」で
置き換わる

```
(define (! n)
  (cond
    ((= n 0) 1)
    (else (* n (! (- n 1))))))
```

```
(* 3 2)
```

→ 6

「(* 3 2)」は, 「6」で
置き換わる

(! 3) から 6 が得られる過程の概略



(! 3) 最初の式

= ...

= (* 3 (! 2))

= ...

= (* 3 (* 2 (! 1)))

= ...

= (* 3 (* 2 (* 1 (! 0))))

= ...

= (* 3 (* 2 (* 1 1)))

= (* 3 (* 2 1))

= (* 3 2)

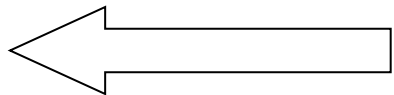
コンピュータ内部での計算

= 6 実行結果

(! 3) から 6 が得られる過程の概略



```
(! 3)
= ...
= (* 3 (! 2))
= ...
= (* 3 (* 2 (! 1)))
= ...
= (* 3 (* 2 (* 1 (! 0))))
= ...
= (* 3 (* 2 (* 1 1)))
= (* 3 (* 2 1))
= (* 3 2)
= 6
```



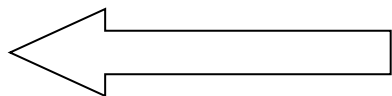
この部分は

```
(! 3)
= (cond
  [(= 3 0) 1]
  [else (* 3 (! (- 3 1)))]])
= (cond
  [false 1]
  [else (* 3 (! (- 3 1)))]])
= (* 3 (! (- 3 1)))
= (* 3 (! 2))
```

(! 3) から 6 が得られる過程の概略



```
(! 3)  
=  
= ...  
= (* 3 (! 2))
```



この部分は

```
(! 3)  
= (cond  
  [(= 3 0) 1]  
  [else (* 3 (! (- 3 1)))]])  
= (cond  
  [false 1]
```

```
= ...  
= (* 3 (* 2 (! 1)))
```

```
= これは,  
= (define (! n)  
= (cond  
= [(= n 0) 1]  
= [else (* n (! (- n 1)))]])  
= の n を 3 で置き換えたもの
```

```
= 6
```

(! 3) から 6 に至る過程



$$\begin{aligned} & \boxed{(! 3)} \\ & = \dots \\ & = (* 3 (! 2)) \\ & = \dots \\ & = (* 3 (* 2 (! 1))) \\ & = \dots \\ & = (* 3 (* 2 (* 1 (! 0)))) \\ & = \dots \\ & = (* 3 (* 2 (* 1 1))) \\ & = (* 3 (* 2 1)) \\ & = (* 3 2) \\ & = \boxed{6} \end{aligned}$$

基本的な計算式への展開

「(! 3)」が膨張して
「(* 3 (* 2 (* 1 (! 0))))」
になる

演算の実行

「(* 3 (* 2 (* 1 (! 0))))」
が収縮して 6 になる

線形再帰的プロセス



- 基本的な計算式へ展開

例 $(! 3) \Rightarrow (* 3 (* 2 (* 1 (! 0))))$

再帰の呼び出し回数（=ステップ数ともいう）に比例して成長する
⇒ 「線形再帰」の名前の由来

! が繰り返される回数

(! 3) ①

= ...

= (* 3 (! 2)) ②

= ...

= (* 3 (* 2 (! 1))) ③

= ...

= (* 3 (* 2 (* 1 (! 0)))) ④

= ...

= (* 3 (* 2 (* 1 1)))

= (* 3 (* 2 1))

= (* 3 2)

= 6

n=3 のとき,
4回繰り返して実行される

! が繰り返される回数

(! 4) ①

= ...

= (* 4 (! 3)) ②

= ...

= (* 4 (* 3 (! 2))) ③

= ...

= (* 4 (* 3 (* 2 (! 1)))) ④

= ...

= (* 4 (* 3 (* 2 (* 1 (! 0)))) ⑤

= ...

= (* 4 (* 3 (* 2 (* 1 1))))

= (* 4 (* 3 (* 2 1)))

= (* 4 (* 3 2))

= (* 4 6)

= 24

n=4 のとき,
5回繰り返して実行される

例題 3. 反復的プロセスでの階乗



- 階乗を計算する関数 **!** を作り, 実行する
 - 次の方針でプログラムを作成する
 $n > 0$ のとき, 1 から開始して, $1 \times 2 \times \dots \times n$ を計算する

例) $(!6) = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$

- $n!$ の計算
 1. まず, 1 に 2 を掛ける
 2. 次に, 3 を掛ける
 3. . . .
 4. n に達するまで続ける

「例題 3 . 反復的プロセスでの階乗」の手順

1. 次を「定義用ウィンドウ」で、実行しなさい
 - 入力した後に、Execute ボタンを押す

```
;; ! : number -> number
;; to compute n*(n-1)*...*2*1
;; (! 4) = 24
(define (! n)
  (factorial 1 1 n))
(define (factorial product counter max)
  (cond
    [(> counter max) product]
    [else (factorial (* counter product)
                     (+ counter 1)
                     max)]))
```

2. その後、次を「実行用ウィンドウ」で実行しなさい

```
(! 4)
(! 10)
(! 20)
```

```
Untitled - DrScheme
File Edit Windows Show Language Scheme Help
Untitled Save Check Syntax Step Execute Break
(define ...)

;; ! : number -> number
;; to compute n*(n-1)*...*2*1
;; (! 4) = 24
(define (! n)
  (factorial 1 1 n))
(define (factorial product counter n)
  (cond
    [(> counter n) product]
    [else (factorial (* counter product)
                     (+ counter 1)
                     n)]))

>
```

まず、Scheme のプログラムを
コンピュータに読み込ませている

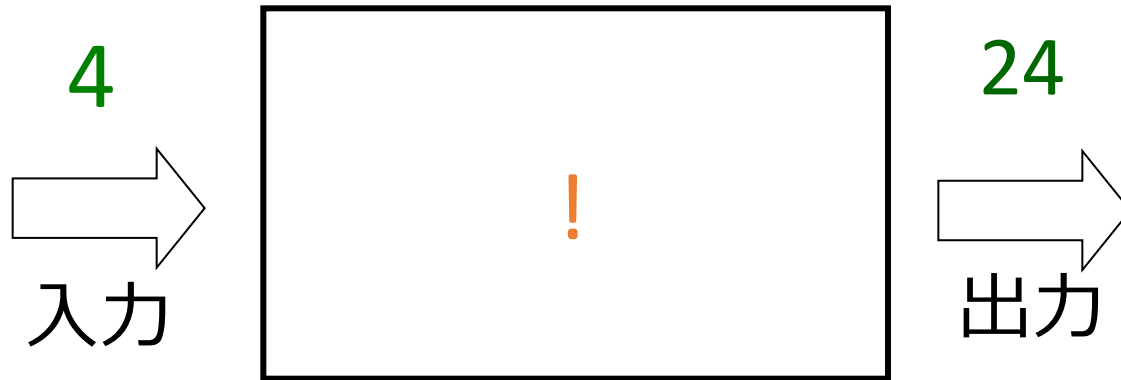
```
Untitled - DrScheme
File Edit Windows Show Language Scheme Help
Untitled Save
Check Syntax Step Execute Break
;; ! : number
;; to compute
;; (! 4) = 24
(define (! n)
  (factorial
   (define (facto
    (cond
      [(> counter
       [else (factorial (* counter product)
                        (+ counter 1)
                        n])]))
> (! 4)
24
> (! 10)
3628800
> (! 20)
2432902008176640000
>
```

これは,
(! 4)
と書いて, n の値を
4 に設定しての実行

実行結果である「24」が
表示される



入力と出力



入力は数値

出力は数値

! 関数

;; ! : number -> number

;; to compute $n*(n-1)*...*2*1$

;; (! 4) = 24

```
(define (! n)
```

```
  (factorial 1 1 n))
```

```
(define (factorial product counter n)
```

```
  (cond
```

product ← counter · product

```
    [(> counter n) product]
```

```
    [else (factorial (* counter product)
```

```
                  (+ counter 1)
```

```
                  n])))
```

counter ← counter + 1

反復的プロセスでの階乗



counter: 1 から n まで数えるカウンタ
product: 部分積 (計算の途中結果)
とする.

$\text{product} \leftarrow \text{counter} \cdot \text{product}$

$\text{counter} \leftarrow \text{counter} + 1$

を繰り返す. counter が n に達すると
 $n!$ が求まる

1. $counter > n$ ならば : \rightarrow 終了条件
product \rightarrow 自明な解

2. そうで無ければ :

次を実行する

$product \leftarrow counter \cdot product$

$counter \leftarrow counter + 1$

反復的プロセスでの階乗

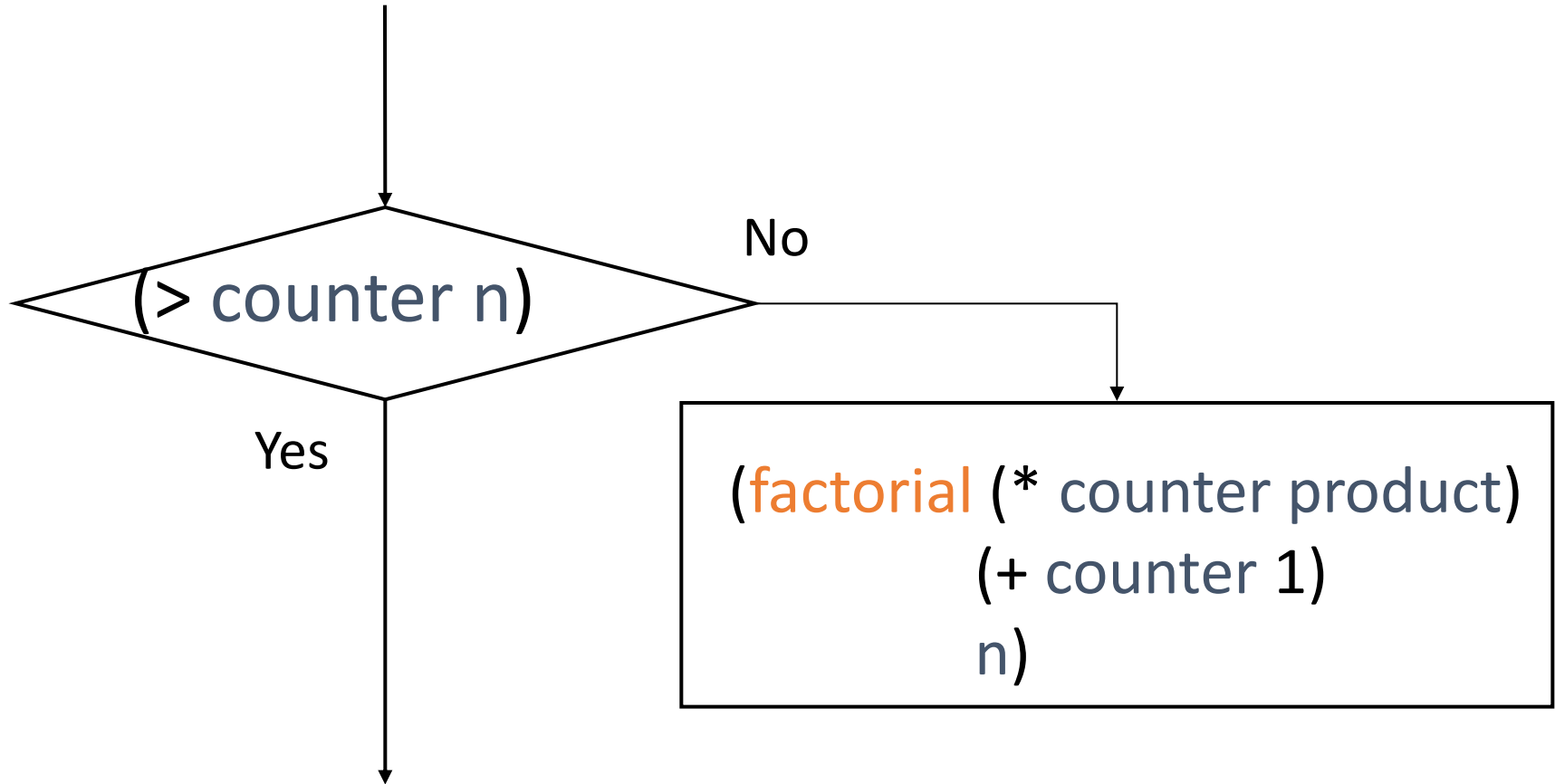


```
;; ! : number -> number  
;; to compute n*(n-1)*...*2*1  
;; (! 4) = 24
```

終了条件

```
(define (! n)  
  (factorial 1 1 n))  
(define (factorial product counter n)  
  (cond  
    [(> counter n) product] 自明な解  
    [else (factorial (* counter product)  
                     (+ counter 1)  
                     n))]))
```

終了条件



product が自明の解

例題 4 . ステップ実行



- factorial の内部に factorial が登場

```
(define (factorial product counter n)
  (cond
    [(> counter n) product]
    [else (factorial (* counter product)
                     (+ counter 1)
                     n)]))
```

- factorial の実行が繰り返される

例 : (factorial 6 4 10) = (factorial 24 5 10)

(factorial 24 5 10) = (factorial 120 6 10)

例題 4 . ステップ実行

- 関数 ! (例題 3) について, 実行結果に至る過程を見る
 - (! 4) から 24 に至る過程を見る
 - DrScheme の stepper を使用する

```
(define (factorial product counter n)
  (cond
    [(> counter n) product]
    [else (factorial (* counter product)
                     (+ counter 1)
                     n)]))
```

```
(! 4)
= (factorial 1 1 4)
= ...
= (factorial 1 2 4)
= ...
= (factorial 2 3 4)
= ...
= (factorial 6 4 4)
= ...
= (factorial 24 5 4)
= ...
= 24
```

「例題 4 . ステップ実行」の手順

1. 次を「定義用ウィンドウ」で，実行しないで
 - Intermediate Student で実行すること
 - 入力した後に，Execute ボタンを押す

```
(define (! n)
  (factorial 1 1 n))
(define (factorial product counter max)
  (cond
    [(> counter max) product]
    [else (factorial (* counter product)
                     (+ counter 1)
                     max)]))
```

```
(! 4)
```

← 例題 3 と同じ

2. DrScheme を使って，ステップ実行の様子を確認しないで (Step ボタン，Next ボタンを使用)
 - 理解しながら進むこと

☆ 次は，例題 5 に進んでください

(! 4) から 24 が得られる過程の概略



(! 4) 最初の式

= (factorial 1 1 4)

= ...

= (factorial 1 2 4)

= ...

= (factorial 2 3 4)

= ...

= (factorial 6 4 4)

= ...

= (factorial 24 5 4)

= ... コンピュータ内部での計算

= 24 実行結果

(! 4) から 24 が得られる過程の概略

(! 4)

= (factorial 1 1 4)

= ...

= (factorial 1 2 4)

= ...

= (factorial 2 3 4)

= ...

= (factorial 6 4 4)

= ...

= (factorial 24 5 4)

= ...

= 24 product counter max

product, counter の
値が変化する

- counter
→ 繰り返し回数
- product
→ 部分積

反復的プロセスの特徴



- 線形再帰的プロセスのような伸び縮みは無い
- 関数を再帰的に呼び出す各ステップで計算が実行される

例 $(! 3) = (\text{factorial } 1 \ 1 \ 3)$
 $= (\text{factorial } 1 \ 2 \ 3)$
 $= (\text{factorial } 2 \ 3 \ 3)$
 $= (\text{factorial } 6 \ 4 \ 3)$



各ステップで、
product と counter
に関する計算が
実行される

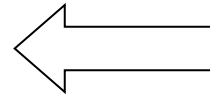
伸び縮み無し

(factorial 1 1 4) から (factorial 1 2 4) が得られる過程



(! 4)

```
= (factorial 1 1 4)
= ...
= (factorial 1 2 4)
= ...
= (factorial 2 3 4)
= ...
= (factorial 6 4 4)
= ...
= (factorial 24 5 4)
= ...
= 24
```



この部分は

```
(factorial 1 1 4)
= (cond
  [(> 1 4) 1]
  [else (factorial (* 1 1)
                    (+ 1 1)
                    4)])
= (cond
  [false 1]
  [else (factorial (* 1 1)
                    (+ 1 1)
                    4)])
= (factorial (* 1 1) (+ 1 1) 4)
= (factorial 1 (+ 1 1) 4)
= (factorial 1 2 4)
```

(factorial 1 1 4) から (factorial 1 2 4) が得られる過程



(! 4)

= (factorial 1 1 4)

= ...

= (factorial 1 2 4)

= ...

= (factorial 2 3 4)

= これは,

```
(define (factorial product counter n)
```

```
  (cond
```

```
    [(> counter n) product]
```

```
    [else (factorial (* counter product)
```

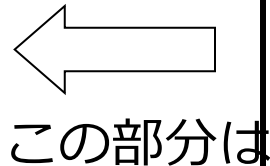
```
                (+ counter 1)
```

```
                n])))
```

= の counter を 1 で, product を 1 で, n を 4 で置き換えたもの

= 24

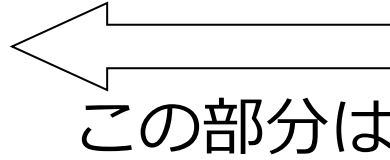
```
(factorial 1 1 4)
= (cond
  [(> 1 4) 1]
  [else (factorial (* 1 1)
                    (+ 1 1)
                    4)])
```



(factorial 1 2 4)

(! 4) から (* 4 (! 3)) が得られる過程

```
(! 4)  
=  
= ...  
= (* 4 (! 3))
```



この部分は

```
(! 4)  
= (cond  
  [(= 4 0) 1]  
  [else (* 4 (! (- 4 1)))]])  
= (cond  
  [false 1]
```

```
= ...  
= (* 4 (* 3 (! 2)))
```

```
=  
= これは,  
= (define (! n)  
= (cond  
= [(= n 0) 1]  
= [else (* n (! (- n 1)))]])  
= の n を 4 で置き換えたもの
```

```
= (* 4 6)
```

```
= 6
```

factorial が繰り返される回数

(! 4)

= (factorial 1 1 4) ①

= ...

= (factorial 1 2 4) ②

= ...

= (factorial 2 3 4) ③

= ...

= (factorial 6 4 4) ④

= ...

= (factorial 24 5 4) ⑤

= ...

= 24

n=4 のとき,
5回繰り返して実行される

例題 5 . 繰り返し回数



- 次のプログラムでは, square は何回実行されるか

```
(define (square x)
```

```
  (* x x))
```

```
(define (total-square x)
```

```
  (cond
```

```
    [(empty? x) 0]
```

```
    [else (+ (square (first x)) (total-square (rest x)))]))
```

実行結果の例

```
(total-square (list 10 20 30))
```

```
1400
```

- square は, リストの要素数だけ実行される

例題 6 . 最大公約数の計算



- ユークリッドの互助法を使って, 2つの整数 m, n から, 最大公約数を求めるプログラム `my-gcd` を作り, 実行する

例) 180, 32 のとき : 4

- ユークリッドの互助法を用いる

- 2つの整数 m, n の最大公約数:

(m, n は正または0)

- $n = 0$ なら

最大公約数は m

- $n \neq 0$ なら

最大公約数は, 「 m を n で割った余り」 と n の最大公約数に等しい

「例題 6 . 最大公約数の計算」 の手順

1. 次を「定義用ウィンドウ」で、実行しなさい
 - 入力した後に、Execute ボタンを押す

```
;; my-gcd: number number -> number
;; to find the greatest common divisor of n and m
;; Example: (my-gcd 180 32) = 4
(define (my-gcd m n)
  (cond
    [(= n 0) m]
    [else (my-gcd n
                  (remainder m n))]))
```

2. その後、次を「実行用ウィンドウ」で実行しなさい

```
(mygcd 180 32)
```

☆ 次は、例題 7 に進んでください

Untitled - DrScheme

File Edit Windows Show Language Scheme Help

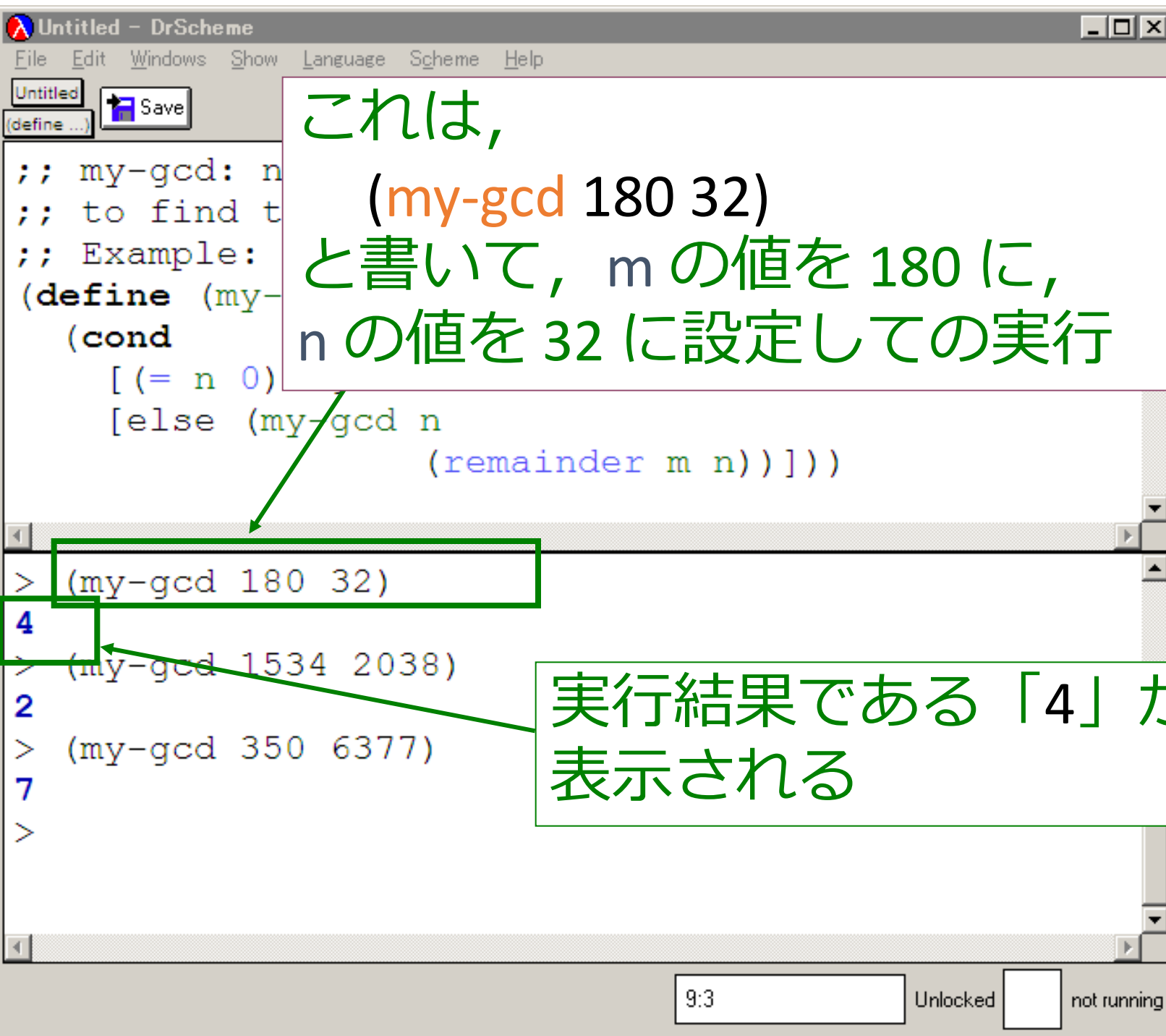
Untitled Save Check Syntax Step Execute Break

```
;; my-gcd: number number -> number
;; to find the greatest common divisor of n and m
;; Example: (my-gcd 180 32) = 4
(define (my-gcd m n)
  (cond
    [(= n 0) m]
    [else (my-gcd n
                  (remainder m n))]))
```

>

11:1 Unlocked not running

まず、Scheme のプログラムを
コンピュータに読み込ませている



入力と出力



入力は, 2つの数値

出力は数値

my-gcd 関数



;; my-gcd: number number -> number

;; to find the greatest common divisor of n and m

;; Example: (my-gcd 180 32) = 4

```
(define (my-gcd m n)
  (cond
    [(= n 0) m]
    [else (my-gcd n
                  (remainder m n))]))
```

1. $n = 0$ ならば :
 m
 - 終了条件
 - 自明な解

2. そうで無ければ :

(1) n

(2) m を n で割った余り

の 2 数の最大公約数を求める.

以上のことを, n が 0 に達するまで繰り返す

```
:: my-gcd: number number -> number
```

```
:: to find the greatest common divisor of n and m
```

```
:: Example: (my-gcd 180 32) = 4
```

```
(define (my-gcd m n)
```

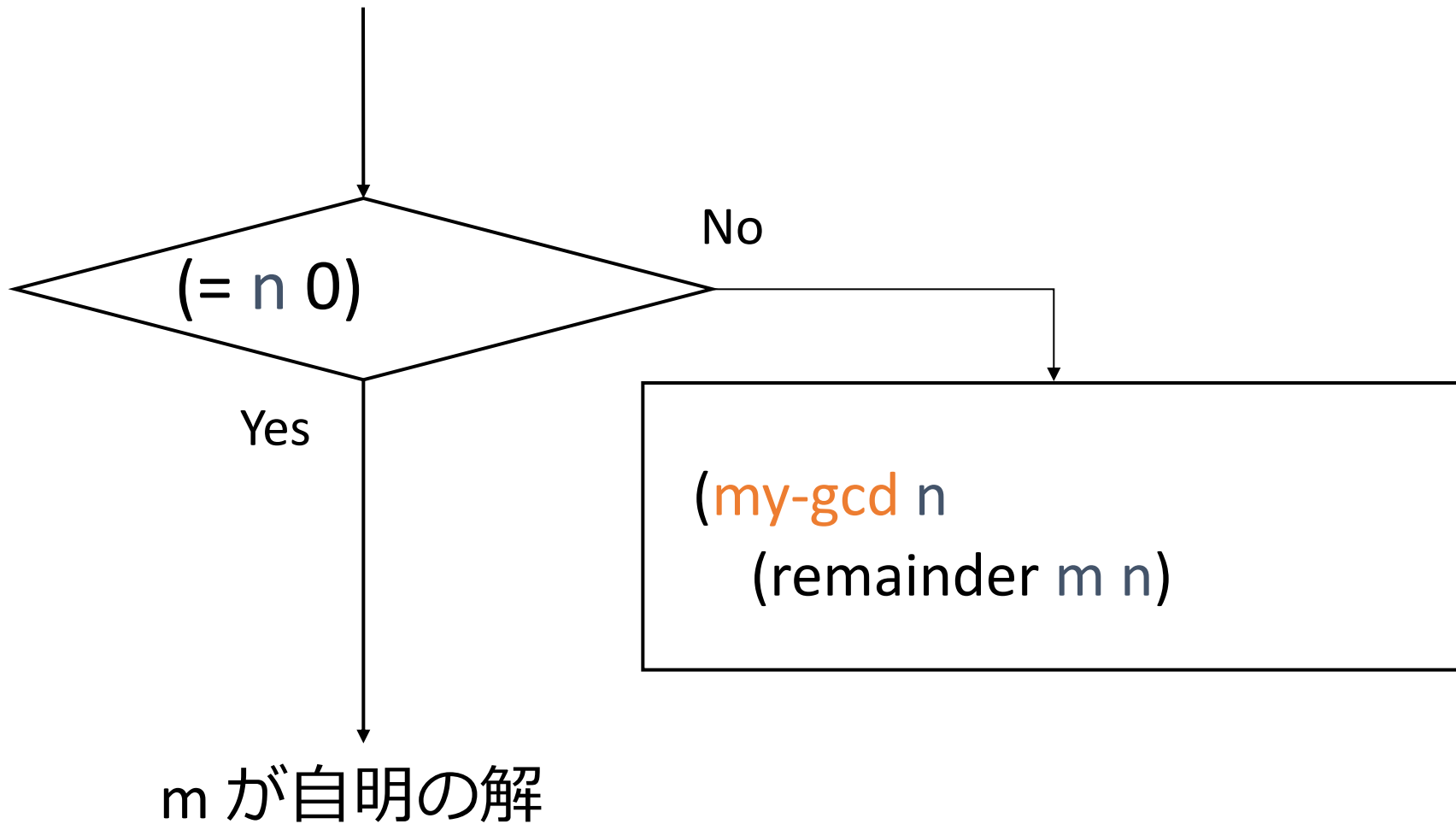
```
  (cond
```

```
    終了条件 [(= n 0) m] 自明な解
```

```
      [else (my-gcd n
```

```
        (remainder m n))]))
```

終了条件



最大公約数の計算



- my-gcd の内部に my-gcd が登場

```
(define (my-gcd m n)
  (cond
    [(= n 0) m]
    [else (my-gcd n
                  (remainder m n))]))
```

- my-gcd の実行が繰り返される

例 : (my-gcd 180 32)

= (my-gcd 32 20)

例題 7. ステップ実行



- 関数 `my-gcd` (例題 6) について, 実行結果に至る過程を見る
 - `(my-gcd 180 32)` から 4 に至る過程を見る
 - DrScheme の stepper を使用する

```
(define (my-gcd m n)
  (cond
    [(= n 0) m]
    [else (my-gcd n
                  (remainder m n))]))
```

```
(my-gcd 180 32)
= ...
= (my-gcd 32 20)
= ...
= (my-gcd 20 12)
= ...
= (my-gcd 12 8)
= ...
= (my-gcd 8 4)
= ...
= (my-gcd 4 0)
= ...
= 4
```

「例題 7. ステップ実行」の手順

1. 次を「定義用ウィンドウ」で，実行しないで
 - Intermediate Student で実行すること
 - 入力した後に，Execute ボタンを押す

```
;; my-gcd: number number -> number
;; to find the greatest common divisor of n and m
;; Example: (my-gcd 180 32) = 4
(define (my-gcd m n)
  (cond
    [(= n 0) m]
    [else (my-gcd n
                  (remainder m n))]))
(my-gcd 180 32)
```

例題 6
と同じ

2. DrScheme を使って，ステップ実行の様子を確認しないで (Step ボタン，Next ボタンを使用)
 - 理解しながら進むこと

☆ 次は，課題に進んでください

(my-gcd 180 32) から 4 が得られる過程の概略



(my-gcd 180 32) 最初の式

```
- ...  
= (my-gcd 32 20)  
= ...  
= (my-gcd 20 12)  
= ...  
= (my-gcd 12 8)  
= ...  
= (my-gcd 8 4)  
= ...  
= (my-gcd 4 0)  
= ...  
= 4
```

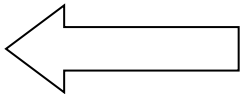
コンピュータ内部での計算

実行結果

(my-gcd 180 32)から (my-gcd 32 20) が得られる過程

(my-gcd 180 32)

```
= ...  
= (my-gcd 32 20)  
= ...
```



この部分は

= (my-gcd 20 12)

= ...

= (my-gcd 12 8)

= ...

= (my-gcd 8 4)

= ...

= (my-gcd 4 0)

= ...

= 4

```
(my-gcd 180 32)  
= (cond  
  [(= 32 0) 180]  
  [else (my-gcd 32  
             (remainder 180 32))])  
= (cond  
  [false 180]  
  [else (my-gcd 32  
             (remainder 180 32))])  
= (my-gcd 32  
   (remainder 180 32))  
= (my-gcd 32 20)
```

180 を 32 で割った余り
は 20

(my-gcd 180 32) から (my-gcd 32 20) が得られる過程



(my-gcd 180 32)

```
= ...  
= (my-gcd 32 20)  
= ...  
= (my-gcd 20 12)  
= ...  
(my-gcd 12 8)
```

← この部分は

```
(my-gcd 180 32)  
= (cond  
  [(= 32 0) 180]  
  [else (my-gcd 32  
            (remainder 180 32))])  
= (cond
```

これは、

```
(define (my-gcd m n)  
  (cond  
    [(= n 0) m]  
    [else (my-gcd n  
              (remainder m n))]))
```

の m を 180 で, n を 32 で置き換えたもの

my-gcd が繰り返される回数



(my-gcd 180 32) ①

= ...

= (my-gcd 32 20) ②

= ...

= (my-gcd 20 12) ③

= ...

= (my-gcd 12 8) ④

= ...

= (my-gcd 8 4) ⑤

= ...

= (my-gcd 4 0) ⑥

= ...

= 4

m=180, n=32 のとき,
6回繰り返して実行される

12-3 課題

課題 1



- 関数 **my-gcd** (授業の例題 6) に関する問題
 - (my-gcd 210 66) から 6 が得られる過程の概略を数行程度で説明しなさい
 - DrScheme の stepper を使うと, すぐに分かる

課題 2



- バックの中のコインの合計を求める関数 **sum-coin** についての問題
 - 下記の空欄を埋めて、関数 **sum-coins** の定義を終えなさい。実行結果も報告しなさい
 - **sum-coins** は、コインの個数のリストと、コインの金額のリストの2つのリストを入力とする

```
;; Contract: sum-coins : a-list-of-numbers a-list-of-numbers -> number
;; Example: (sum-coins (list 23 0 5 7) (list 1 5 10 25)) = 248
(define (sum-coins a b)
  (cond [(empty? a) 0]
        [else (+ (* (first a) (first b))
                  (sum-coins (rest a) (rest b)))]))
```

課題 2 のヒント



- ここにあるのは「間違い」の例です. 同じ間違いをしないこと

1. (= a empty) は間違い

⇒ a がリストのとき、(= a empty) はエラーです.
「=」は数値の比較には使えるが、リスト同士の比較には使えないものと考えて下さい
正しくは、(empty? a) です

課題 3 . 繰り返し回数



- 関数 `my-gcd` (授業の例題 6) に関する問題
 - m, n の最大公約数を, ユークリッドの互助法で求めた場合と, 次ページに示すような方法で求めた場合とで, 関数の繰り返し回数を比較し, 自分なりの考察を加えて報告しなさい

```
(define (first-divisor n m i)
  (cond
    [(= i 1) 1]
    [else (cond
      [(and (= (remainder n i) 0)
            (= (remainder m i) 0)) i]
      [else (first-divisor n m (- i 1))])])])
(define (gcd-structural n m)
  (first-divisor n m (min n m)))
```

「i で割り切れるかを調べながら、
i を 1 減らす」ことを、割り切れる
まで繰り返す

1. まず、n と m の小さい方を変数 i に入れる。
2. i が n と m の両方を割れれば i の値を返し、終了。
3. i の値を1小さくして2へ。
→ n と m は変わらない。i が変化

課題 4. エラトステネスのふるい



- 「エラトステネスのふるい」の原理に基づいて100以下の素数を求めるプログラムを作りなさい

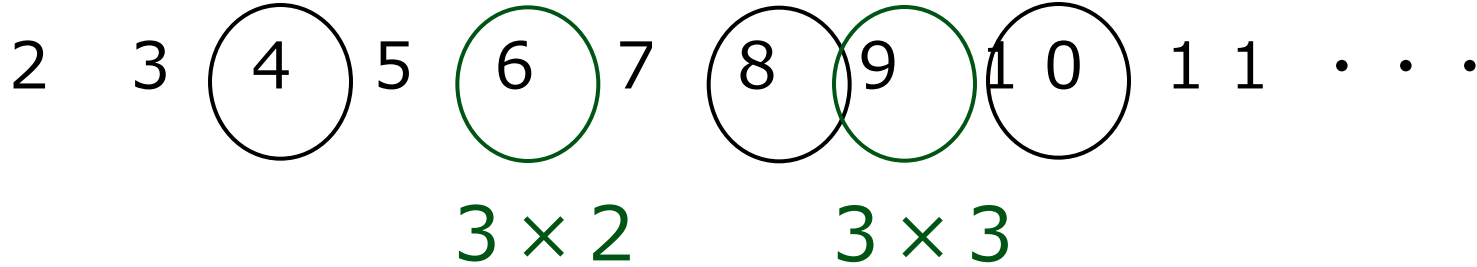
エラトステネスのふるい (1/4)



2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 ...
2 × 2 2 × 3 2 × 4 2 × 5

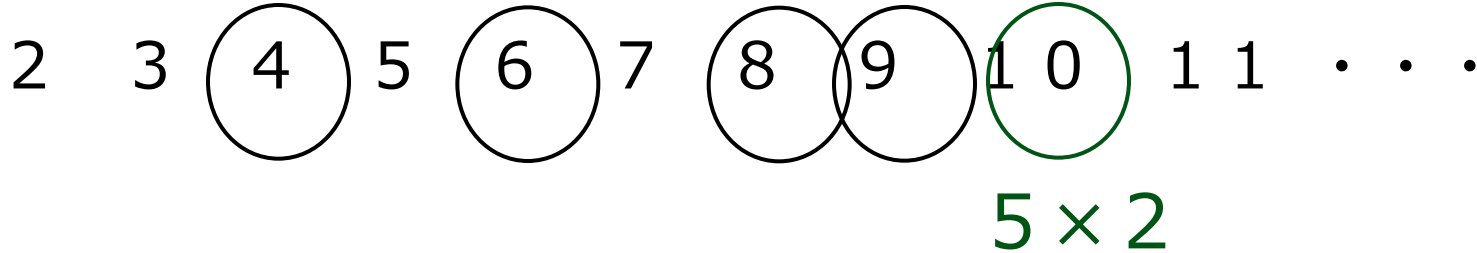
まず、2の倍数を消す

エラトステネスのふるい (2/4)



次に, 3の倍数を消す

エラトステネスのふるい (3/4)



次に, 5の倍数を消す

(「4の倍数」は考えない.

それは, 「4」がすでに消えているから) 97

エラトステネスのふるい (4/4)



2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 . . .

以上のように, 2, 3, 5 . . . の倍数を消す.

10 (これは100の平方根) を超えたら, この操作を止める
(100以下で, 11, 13 . . . の倍数はすでに消えている)