

# or-14. 総合演習①

(オペレーションズリサーチ)

URL: <https://www.kkaneko.jp/cc/or/index.html>

金子邦彦



# アウトライン



## 総合演習を行う

- 待ち行列
- 線形計画法

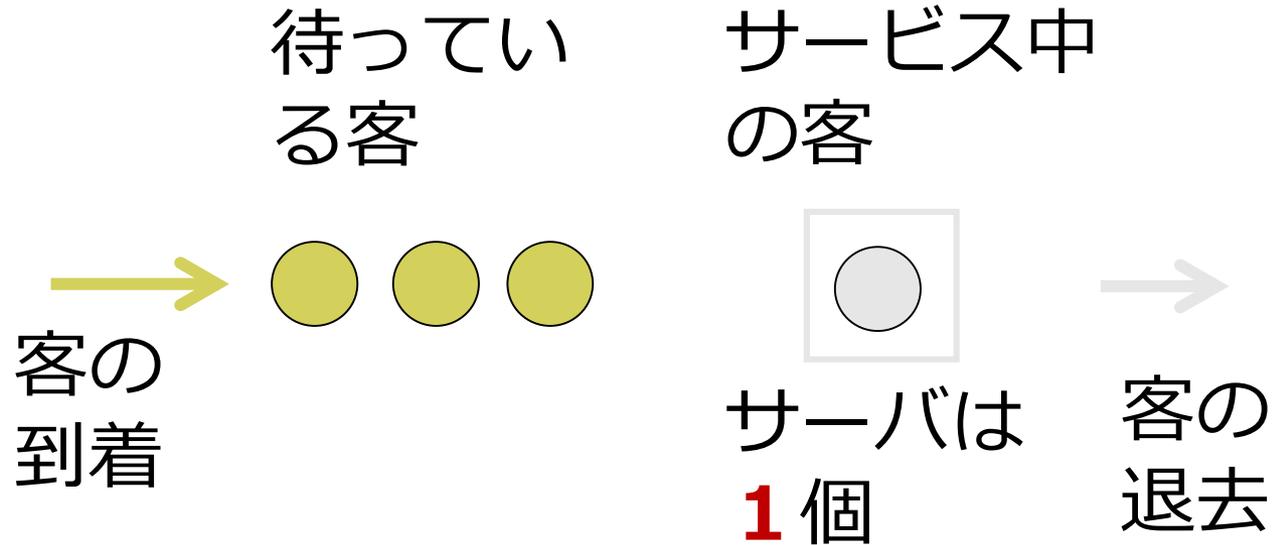
# 14-1. 待ち行列シミュレーション を行うオンラインサイト

# 混雑や滞留の例



- 人  
    窓口, 売り場
- もの  
    車の渋滞, 倉庫への預け入れと取り出し
- 情報  
    インターネットのパケット  
    オペレーティングシステムのプロセス

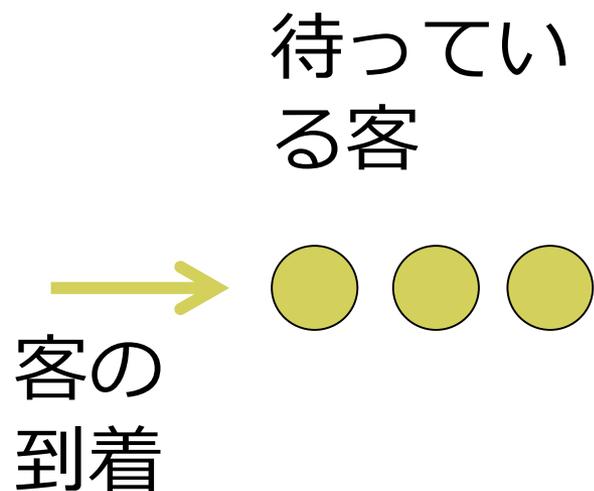
# M/M/1 型の待ち行列



客は**ランダム**  
に到着

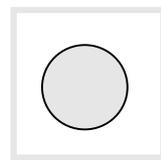
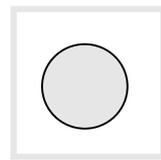
サービスの所要時  
間も**ランダム**

# M/M/2 型の待ち行列



客は**ランダム**  
に到着

サービス中  
の客



サーバは  
**2個**



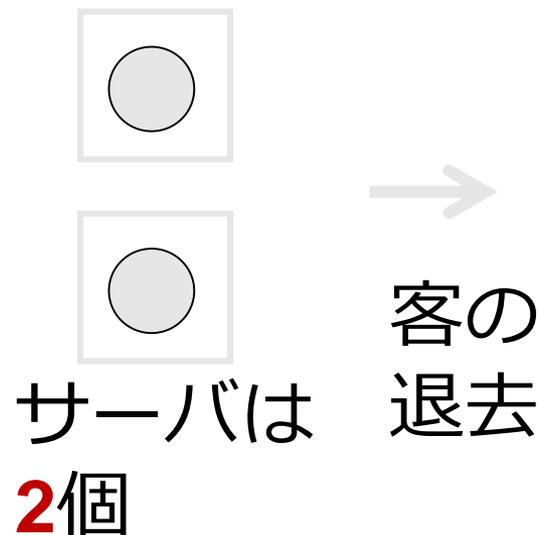
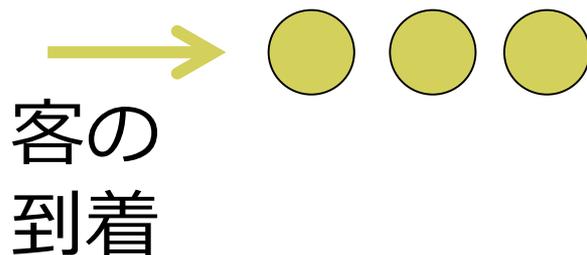
サービスの所要時  
間も**ランダム**

# 今から行う待ち行列シミュレーション

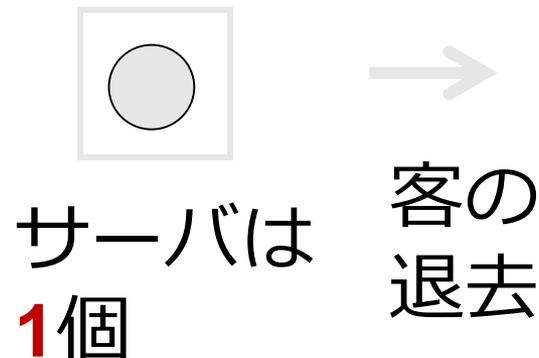
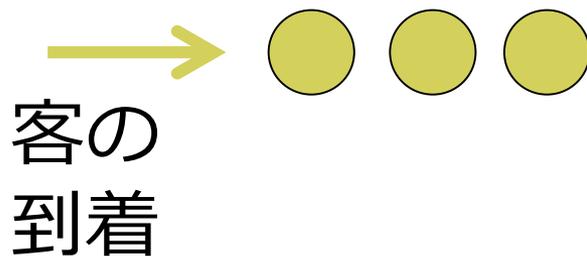


## ① M/M/2 と M/M/1 の比較

M/M/2



M/M/1



# 今から行う待ち行列シミュレーション



② シミュレーションのために、  
**サービス時間の平均，到着間隔の平均を設定する**

## 実データをもとに設定

次の実データでは、  
**サービス時間の平均 97.78**  
**到着間隔の平均 59.54**

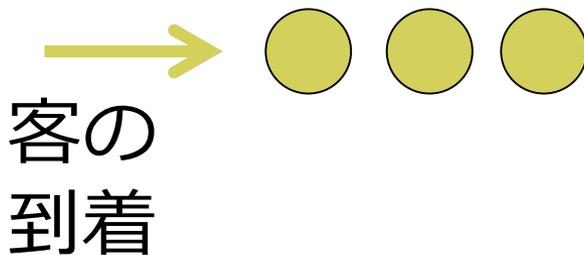
客番号	到着間隔	サービス時間	対数サービス時間
1	25	40	3.6889
2	170	37	3.6109
3	101	168	5.1240
4	308	58	4.0604
5	27	89	4.4886
6	2	52	3.9512
7	31	60	4.0943
8	80	59	4.0775
9	29	133	4.8903
10	16	42	3.7377
11	21	113	4.7274
12	16	27	3.2958
13	37	60	4.0943
14	88	190	5.2470
15	121	72	4.2767
16	76	58	4.0604
17	201	48	3.8712
...			
50	104	54	3.9890
平均	59.54	97.78	4.349
分散	4019.41	5895.53	0.4366

[www.comp.tmu.ac.jp/yamashita/lec/managementscience2015.pptx](http://www.comp.tmu.ac.jp/yamashita/lec/managementscience2015.pptx) より

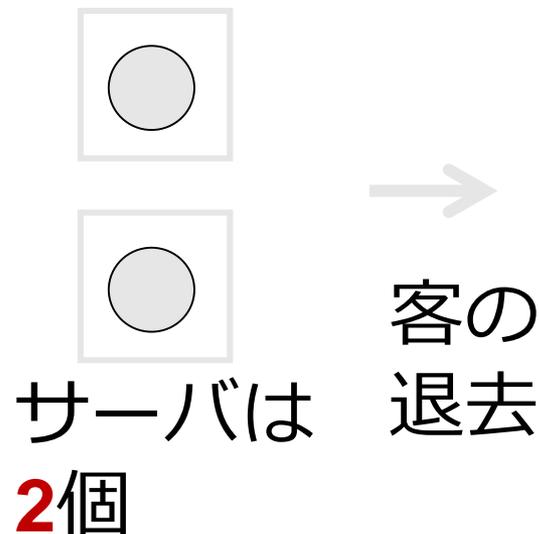
# 今から行う待ち行列シミュレーション



M/M/2

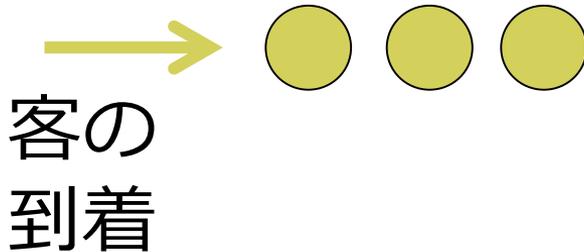


到着間隔の平均 59.54

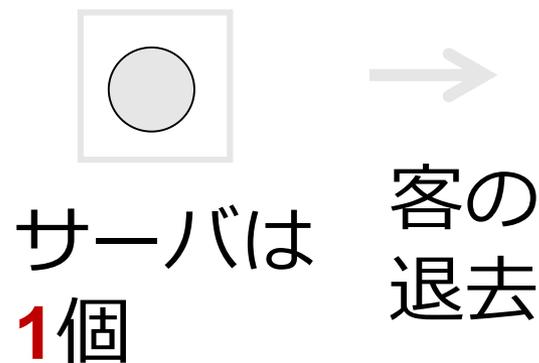


サービス時間の平均 97.78

M/M/1



到着間隔の平均 59.54



サービス時間の平均 48.89  
(2個の場合と比べて, 2倍高速) 9

# 演習



① ウェブブラウザを起動する

**edge を推奨**

② 次の URL を開く

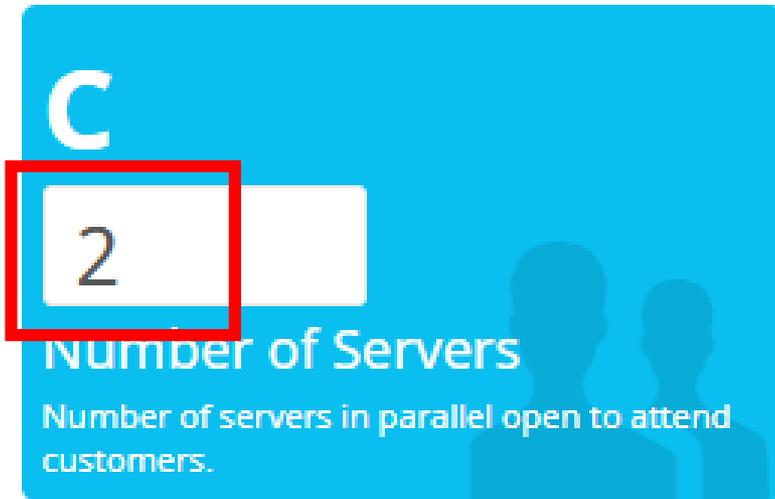
<https://www.supositorio.com/rcalc/rcalclite.htm>

③ 「M/M/C」 をクリック

A screenshot of the website supositorio.com. The page title is "Queueing Theory Calc". Below the title, there is a section titled "Queueing Theory Model" with the instruction "1. Choose the queueing model." There are three model options displayed as dark blue cards with white text and buttons. The first card, "M/M/C", is highlighted with a red rectangular border. It contains the text "Single queue, C servers." and a "Select Model" button. The second card is "M/M/Inf" with "At least one server per customer." and a "Select Model" button. The third card is partially visible, showing "M/M/..." and "Queue c..." and "cus...". At the top left of the page, there is a logo for supositorio.com and two buttons: "Instructions" and "ESPAÑOL".

## ④ M/M/2 のシミュレーション. 次のように設定

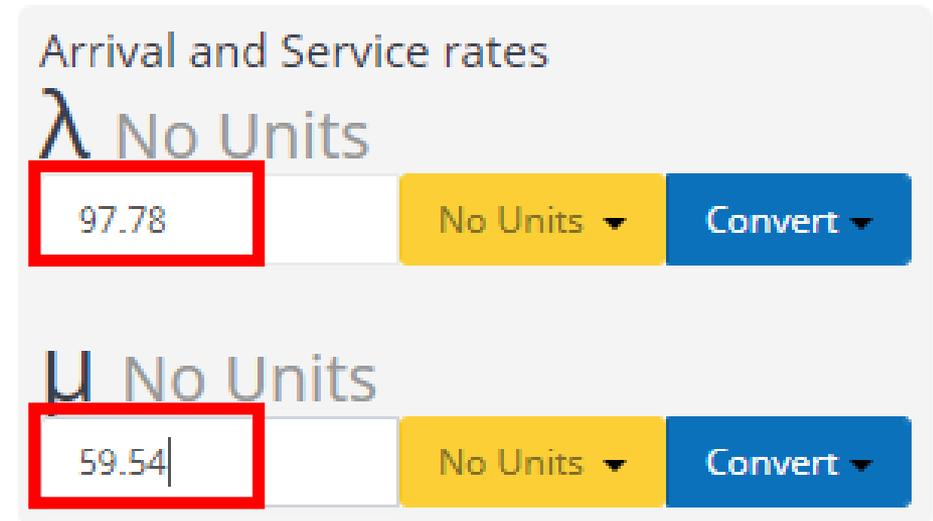
### 2. Input all the values required.



**C**

**Number of Servers**  
Number of servers in parallel open to attend customers.

サーバは **2**個



Arrival and Service rates

$\lambda$  No Units

 No Units 

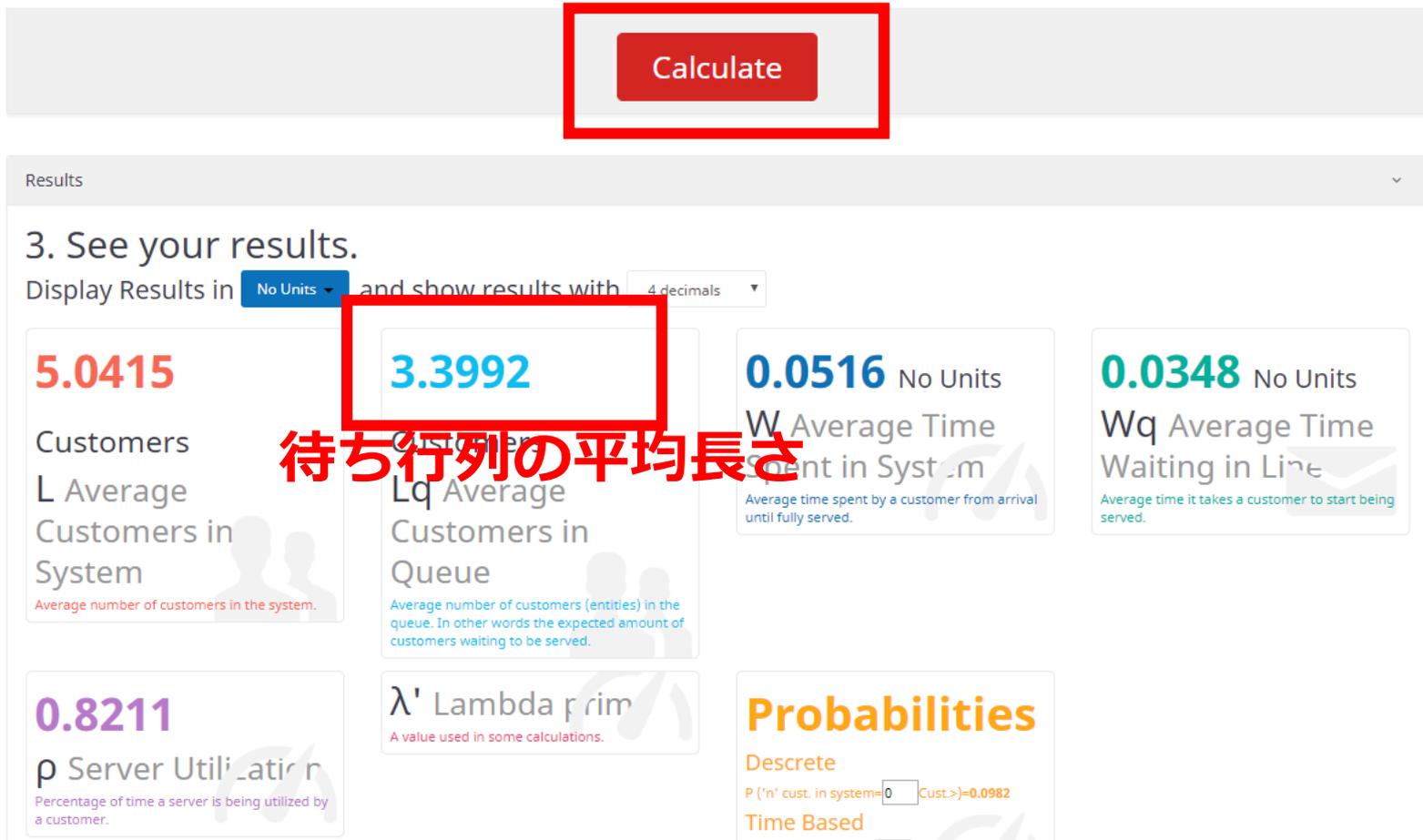
$\mu$  No Units

 No Units 

サービス時間の平均は **97.78**

到着間隔の平均は **59.54**

## ⑤ 「Calculate」 をクリックすると、結果が出る



Calculate

Results

3. See your results.

Display Results in **No Units** and show results with **4 decimals**

Metric	Value
L Average Customers in System	5.0415
Lq Average Customers in Queue	3.3992
W Average Time Spent in System	0.0516 No Units
Wq Average Time Waiting in Line	0.0348 No Units
$\rho$ Server Utilization	0.8211
$\lambda'$ Lambda prim	A value used in some calculations.
Probabilities	Discrete P ('n' cust. in system= <input type="text" value="0"/> Cust.>)=0.0982 Time Based

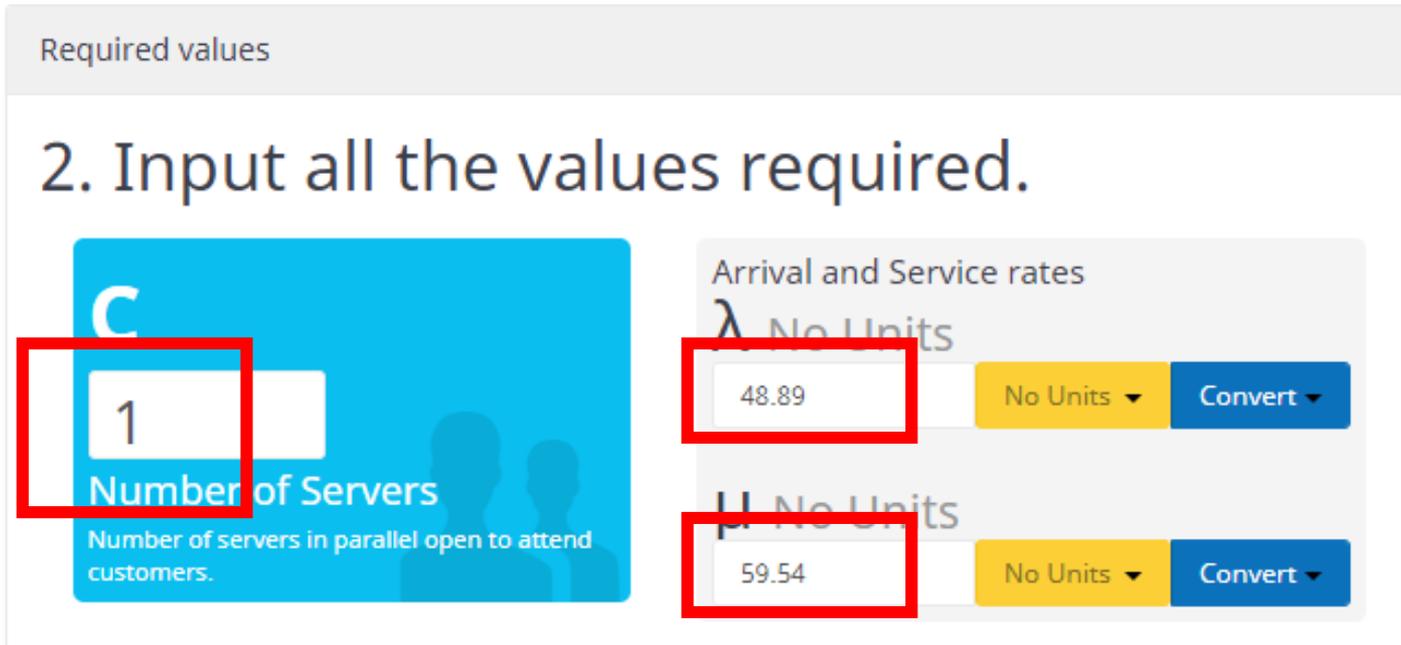
待ち行列の平均長さ

⑥ 今度は、次のように設定  
サーバは **1 個** に。

**サービス時間の平均**は、さっきの**半分**に。

Required values

2. Input all the values required.

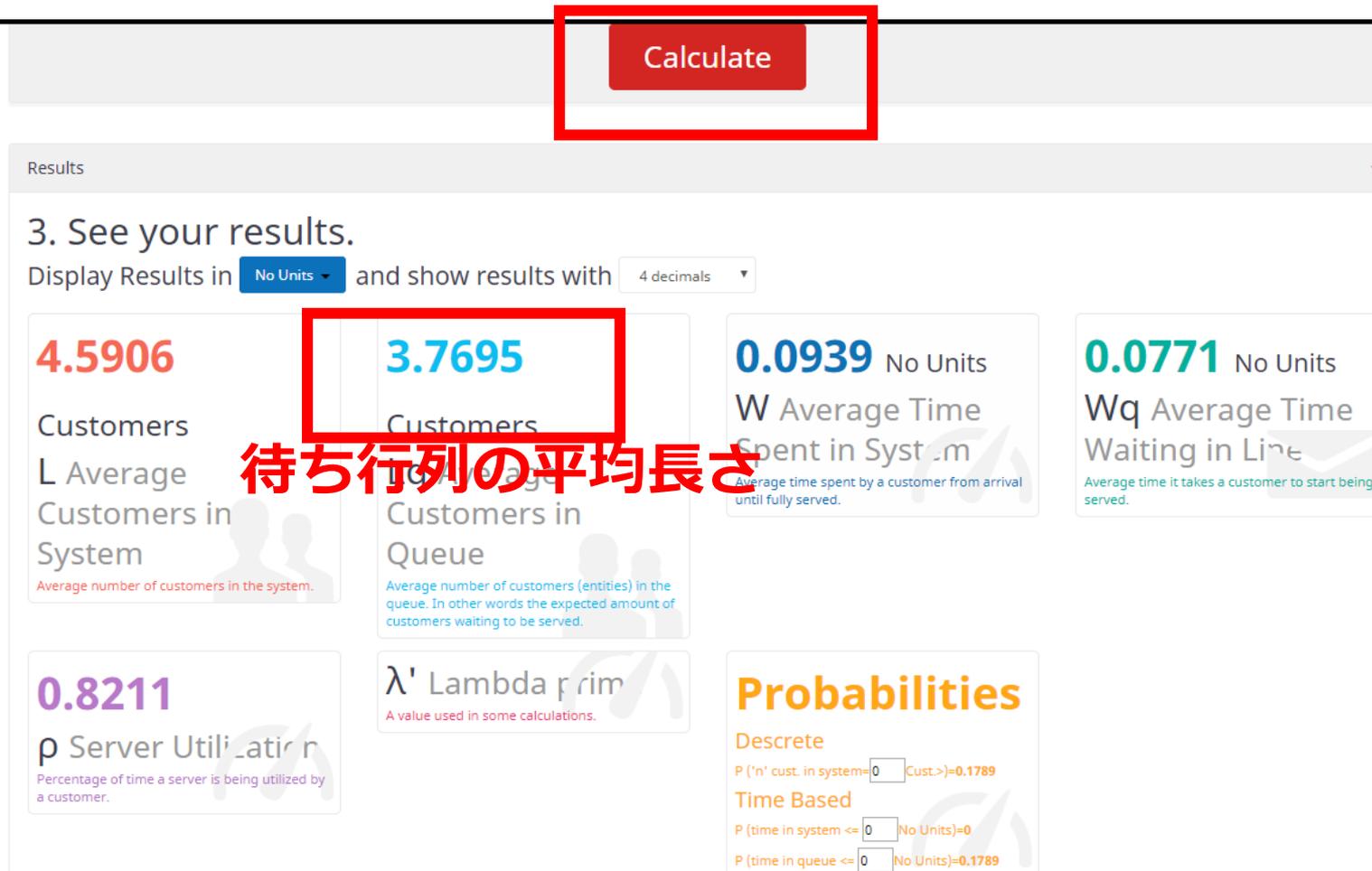


サーバは **1 個**

サービス時間の平均は **48.89**

到着間隔の平均は **59.54**

## ⑦ 「Calculate」 をクリックすると、結果が出る



Calculate

Results

3. See your results.

Display Results in **No Units** and show results with **4 decimals**

<b>4.5906</b> Customers in System Average number of customers in the system.	<b>3.7695</b> Customers in Queue Average number of customers (entities) in the queue. In other words the expected amount of customers waiting to be served.	<b>0.0939</b> No Units W Average Time Spent in System Average time spent by a customer from arrival until fully served.	<b>0.0771</b> No Units Wq Average Time Waiting in Line Average time it takes a customer to start being served.
<b>0.8211</b> rho Server Utilization Percentage of time a server is being utilized by a customer.	$\lambda'$ Lambda prim A value used in some calculations.	<b>Probabilities</b> Discrete P ('n' cust. in system= <input type="text" value="0"/> Cust.)=0.1789 Time Based P (time in system <= <input type="text" value="0"/> No Units)=0 P (time in queue <= <input type="text" value="0"/> No Units)=0.1789	

待ち行列の平均長さ

# 結果の比較



サーバの個数	サービス時間の平均	到着間隔の平均	待ち行列の平均長さ
2	97.78	59.54	3.3992
1	48.89	59.54	3.7695

①サーバが2個

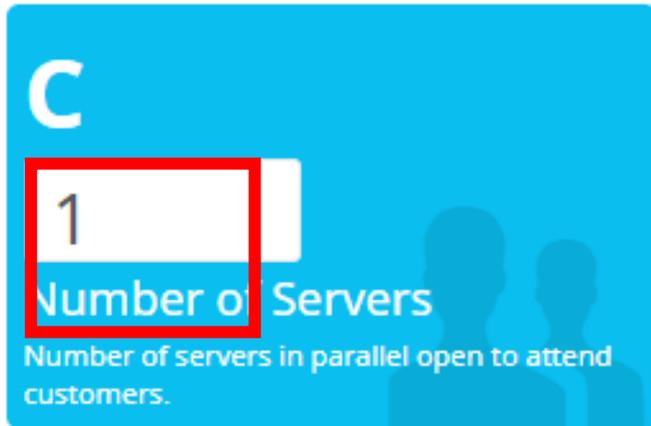
②サーバは1個、性能は2倍

①の方が、待ち行列の平均長さが短い。  
待たせずに済みそう

⑧ 今度は、次のように設定

客が**20%減** (到着間隔は 1.25倍)

2. Input all the values required.

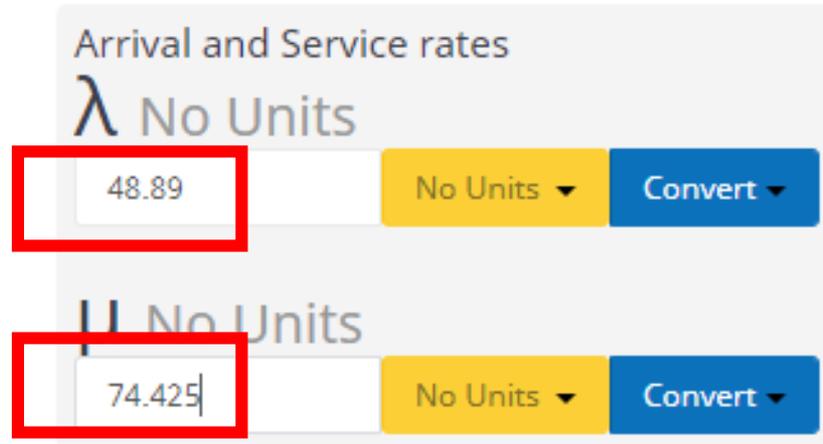


**C**

**1**

Number of Servers

Number of servers in parallel open to attend customers.



Arrival and Service rates

$\lambda$  No Units

48.89 No Units Convert

$\mu$  No Units

74.425 No Units Convert

サーバは**1**個

サービス時間の平均は**48.89**

到着間隔の平均は**74.425**

## ⑨ 「Calculate」 をクリックすると，結果が出る

**Calculate**

Results

3. See your results.

Display Results in **No Units** and show results with **4 decimals**

**1.9146**  
Customers  
L Average Customers in System  
Average number of customers in the system.

**1.2577**  
Customers  
W Average Customers in Queue  
Average number of customers (entities) in the queue. In other words the expected amount of customers waiting to be served.

**0.0392** No Units  
W Average Time Spent in System  
Average time spent by a customer from arrival until fully served.

**0.0257** No Units  
Wq Average Time Waiting in Line  
Average time it takes a customer to start being served.

**0.6569**  
 $\rho$  Server Utilization  
Percentage of time a server is being utilized by a customer.

$\lambda'$  Lambda prim  
A value used in some calculations.

**Probabilities**

Discrete  
P ('n' cust. in system= Cust.)=0.3431

Time Based  
P (time in system <=  No Units)=0  
P (time in queue <=  No Units)=0.3431

**待ち行列の平均長さ**

# 結果の比較



サーバの個数	サービス時間の平均	到着間隔の平均	待ち行列の平均長さ
2	97.78	59.54	3.3992
1	<b>48.89</b>	<b>59.54</b>	<b>3.7695</b>
1	<b>48.89</b>	<b>74.425</b>	<b>1.2577</b>

客が20%減っただけで、待ち行列が約1/3になる

# 14-2. Excel のソルバーと 線形計画法

# Excel のソルバー



- 線形計画法の機能を持つ
- 「変数が整数である」という制約を扱う機能も持つ

# Excel のアプリ版での前準備



- ① Excel で, ファイル, オプション, アドインと操作
- ② Excel アドインで, 「ソルバーアドイン」を選び「設定」

Excel のオプション

Microsoft Office のアドインの表示と管理を行います。

名前 ^	場所	種類
<b>アクティブなアプリケーション アドイン</b>		
分析ツール	C:\...ice\root\Office16\Library\Analysis\ANALYS32.XLL	Excel アドイン
<b>アクティブでないアプリケーション アドイン</b>		
Euro Currency Tools	C:\...oft\Office\root\Office16\Library\EUROTOOL.XLAM	Excel アドイン
Inquire	C:\...86)\Microsoft Office\Office16\DCF\NativeShim.dll	COM アドイン
Microsoft Actions Pane 3		XML 拡張パック
Microsoft Power Map for Excel	C:\...Power Map Excel Add-in\EXCELPLUGINSHELL.DLL	COM アドイン
Microsoft Power Pivot for Excel	C:\...Pivot Excel Add-in\PowerPivotExcelClientAddIn.dll	COM アドイン
Microsoft Power View for Excel	C:\...r View Excel Add-in\AdHocReportingExcelClient.dll	COM アドイン
<b>ソルバー アドイン</b>	C:\...ice\root\Office16\Library\SOLVER\SOLVER.XLAM	Excel アドイン
ロケール (XML)	C:\...on Files\Microsoft Shared\Smart Tag\MOFL.DLL	操作
分析ツール - VBA	C:\...root\Office16\Library\Analysis\ATPVBAEN.XLAM	Excel アドイン

**ドキュメント関連アドイン**  
ドキュメント関連アドインはありません

**無効なアプリケーション アドイン**  
無効なアプリケーション アドインはありません

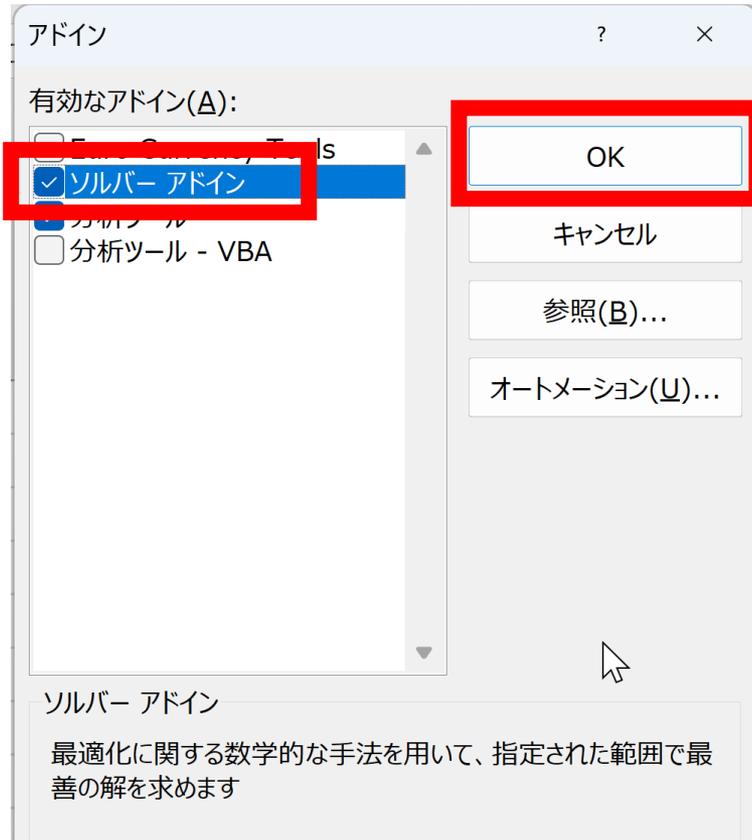
アドイン: ソルバー アドイン  
発行者:  
互換性: 互換性に関する情報はありません  
場所: C:\Program Files\Microsoft Office\root\Office16\Library\SOLVER\SOLVER.XLAM

説明: 最適化に関する数学的な手法を用いて、指定された範囲で最善の解を求めます

管理(A): Excel アドイン 設定(G)...

OK キャンセル

### ③ 「ソルバーアドイン」 をチェックし 「OK」



# 線形計画法の例題

- 変数  $x$  と  $y$  ( $x$  と  $y$  は 整数 である)
- 制約

$$3x + y \leq 10$$

$$x + 2y \leq 4$$

一次式

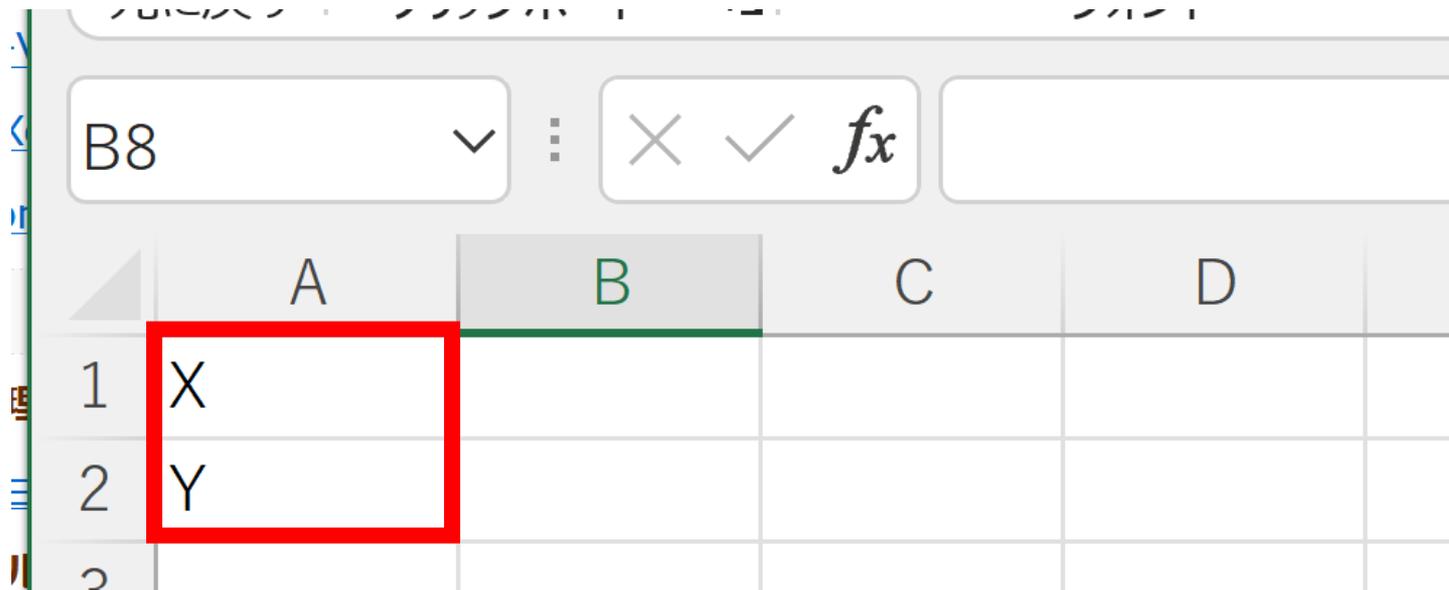
これら制約のもとで

**$x + y$  の最大値**

はいくらか？

# 演習

- ① **変数の個数は 2個 (2変数)** なので  
→ 2行使う。  
分かりやすくするために  
**A1 と A2 に, 変数名 X, Y を書く**



	A	B	C	D
1	X			
2	Y			

## ② セル C1, C2, D1, D2, E1, E2 に値を書く

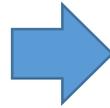
### 制約式

$$3x + y \leq 10$$

$$x + 2y \leq 4$$

### 目的

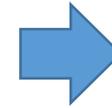
$x + y$  の最大化



$$3x + 1y$$

$$1x + 2y$$

$$1x + 1y$$



$x$     $y$

3   1

1   2

1   1

1 を補う

縦横入れ替え



		A	B	C	D	E
1	X			3	1	1
2	Y			1	2	1
3						

③ セル **C3** に次の式を書く  
変数の個数は 2個 (2変数) である

=SUMPRODUCT(**C1:C2**, \$B1:\$B**2**)

	A	B	C
1	X		3
2	Y		1
3			0

**$3x + 1y$**

になる予定

④ セル C3 の式を, D3, E3 に「コピー&貼り付け」する。 右クリックメニューが便利

その結果, 次のようになる

セル D3: =SUMPRODUCT(D1:D2, \$B1:\$B2)

セル E3: =SUMPRODUCT(E1:E2, \$B1:\$B2)

	A	B	C	D	E
1	X		3	1	1
2	Y		1	2	1
3			0	0	0
4					

$1x + 2y$

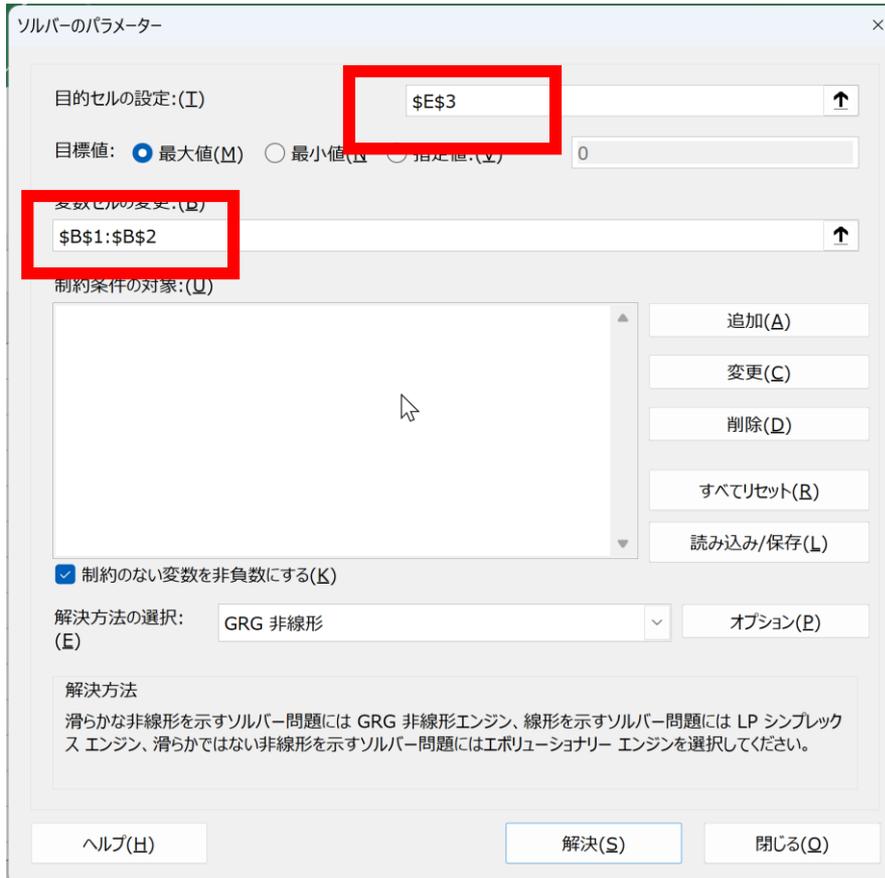
になる予定

$1x + 1y$

になる予定

## ⑤ Excel で線形計画法の設定を開始

- セル B1 から B2 を範囲選択してから、
- 「データ」 → 「ソルバー」 と操作
- まず、次のように設定。



ソルバーのパラメーター

目的セルの設定:(I)

目標値:  最大値(M)  最小値(L)  指定値(V)

変数セルの変更:(J)

制約条件の対象:(L)

制約のない変数を非負数にする(K)

解決方法の選択:(E)  オプション(P)

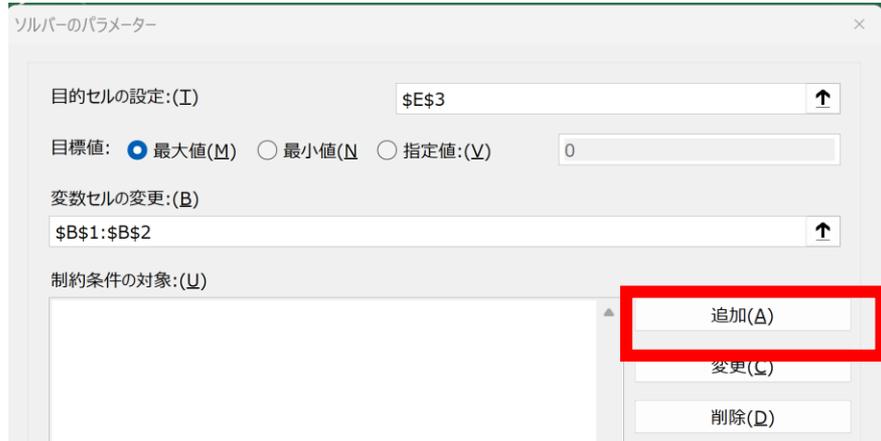
解決方法  
滑らかな非線形を示すソルバー問題には GRG 非線形エンジン、線形を示すソルバー問題には LP シンプレックス エンジン、滑らかではない非線形を示すソルバー問題にはエボリュショナリー エンジンを選択してください。

ヘルプ(H) 解決(S) 閉じる(Q)

\$E\$3

\$B\$1:\$B\$2

⑥ 「追加」をクリック。  $3x + y \leq 10$  についての制約条件を追加。「追加」をクリック。



$$\$C\$3 \leq 10$$

「追加」をクリック

制約式

$$3x + y \leq 10$$

⑦  $x + 2y \leq 4$  についての  
制約条件を追加。「追加」をクリック。

制約条件の追加 ×

セル参照:(E)		制約条件:(N)
\$D\$3	↑ <= ↓	4 ↑

OK      **追加(A)**      キャンセル(C)

$\$D\$3 \leq 4$

「追加」をクリック

制約式

$$x + 2y \leq 4$$

⑧  $x, y$  は整数であるという

制約条件を追加. 「追加」をクリック.



制約条件の追加

セル参照:(E)      制約条件:(N)

\$B\$1:\$B\$2    ↑    int    ↓    整数    ↑

OK      追加(A)      キャンセル(C)

\$B\$1:\$B\$2  
int

「追加」をクリック

⑨ 制約条件の追加を終わる。「キャンセル」をクリック。



制約条件の追加 ×

セル参照:(E)      制約条件:(N)

↑    <=    ↓     ↑

OK      追加(A)      **キャンセル(C)**

「キャンセル」をクリック

# ⑩ 「解決」をクリック。

ソルバーのパラメーター

×

目的セルの設定:(I)

目標値:  最大値(M)  最小値(N)  指定値:(V)

変数セルの変更:(B)

制約条件の対象:(U)

制約のない変数を非負数にする(K)

解決方法の選択:    
(E)

解決方法  
滑らかな非線形を示すソルバー問題には GRG 非線形エンジン、線形を示すソルバー問題には LP シンプレックスエンジン、滑らかではない非線形を示すソルバー問題にはエボリューションナリー エンジンを選択してください。

# ⑪ 結果を確認

- 変数  $x$  と  $y$  ( $x$  と  $y$  は整数である)
- 制約

$$3x + y \leq 10$$

$$x + 2y \leq 4$$

これら制約のもとで

**$x + y$  の最大値は 3**

	A	B	C	D	E
1	X	2	3	1	1
2	Y	1	1	2	1
3			7	4	3

## 14-3. 変数の数が 3 の場合

## 線形計画法の例題

- 変数  $X$  と  $Y$  と  $Z$  ( $X$  と  $Y$  と  $Z$  は整数である)

- 制約式

$$2X + 3Y + 4Z \leq 20$$

$$3X + 4Y + 2Z \leq 25$$

$$5X + 2Y + 2Z \leq 24$$

- これら制約のもとで

**$X + Y + Z$  の最大値**

はいくらか？

# 演習

① **変数の個数は 3個 (3変数)** なので

→ 3行使う.

分かりやすくするために

**A1 と A2 と A3 に, 変数名 X, Y, Z を書く**

100

	A	B	C	D	E
1	X				
2	Y				
3	Z				

## ② 次のように値を書く

### 制約式

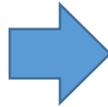
$$2X + 3Y + 4Z \leq 20$$

$$3X + 4Y + 2Z \leq 25$$

$$5X + 2Y + 2Z \leq 24$$

### 目的

$X + Y + Z$  の最大化



$$2X + 3Y + 4Z$$

$$3X + 4Y + 2Z$$

$$5X + 2Y + 2Z$$

$$1X + 1Y + 1Z$$

1を補う



	X	Y	Z
2	3	4	
3	4	2	
5	2	2	
1	1	1	



縦横入れ替え

	A	B	C	D	E	F
1	X		2	3	5	1
2	Y		3	4	2	1
3	Z		4	2	2	1

③ セル **C4** に次の式を書く  
変数の個数は 3個 (3変数) である

=SUMPRODUCT(**C1:C3**, \$B1:\$B**3**)

	A	B	C	D	数式バー E	F
1	X		2	3	5	1
2	Y		3	4	2	1
3	Z		4	2	2	1
4			0			

④ セル **C4** の式を, **D4, E4, F4** に「コピー&貼り付け」する。 右クリックメニューが便利

その結果, 次のようになる

セル **D4**: =SUMPRODUCT(**D1:D3**, \$B1:\$B3)

セル **E4**: =SUMPRODUCT(**E1:E3**, \$B1:\$B3)

セル **F4**: =SUMPRODUCT(**F1:F3**, \$B1:\$B3)

	A	B	C	D	E	F
1	X		2	3	5	1
2	Y		3	4	2	1
3	Z		4	2	2	1
4			0	0	0	0

⑤ セル B1 から B3 を範囲選択してから、  
「データ」→「ソルバー」と操作し次のように  
設定。「解決」をクリック

目的セルの設定:(I)

目標値:  最大値(M)  最小値(N)  指定値:(V)

変数セルの変更:(B)

制約条件の対象:(U)

# 線形計画法の例題

## ⑥ 結果の確認

- X と Y と Z は整数である

- 制約式

$$2X + 3Y + 4Z \leq 20$$

$$3X + 4Y + 2Z \leq 25$$

$$5X + 2Y + 2Z \leq 24$$

- これら制約のもとで

**X + Y + Z の最大値は 7**

**(X=2, Y=2, Z=1 のとき)**

	A	B	C	D	E	F
1	X	2	2	3	5	1
2	Y	4	3	4	2	1
3	Z	1	4	2	2	1
4			20	24	20	7

# 14-4. 線形計画法の演習問題

## 線形計画法の例題

- あるレストランの手持ちの材料

ひきにく **3800**

玉ねぎ **2100**

ケチャップ **1200**

- ハンバーグとオムレツに必要な材料

ハンバーグ 1 個あたり

ひきにく **60**, 玉ねぎ **20**, ケチャップ **20**

オムレツ 1 個あたり

ひきにく **40**, 玉ねぎ **30**, ケチャップ **10**

- ハンバーグは **400**円, オムレツは **300**円である. 売り上げを最大にしたい

# 線形計画法の例題 1

- 変数  $X$  と  $Y$  (**2変数**)
- 制約式

$$60X + 40Y \leq 3800$$

$$20X + 30Y \leq 2100$$

$$20X + 10Y \leq 1200$$

- これら制約のもとで

**$400X + 300Y$  の最大値**

はいくらか？

$X=30, Y=50$  のとき  
最大 27000

	A	B	C	D	E	F	
1	X	30	60	20	20	400	
2	Y	50	40	30	10	300	
3			3800	2100	1100	27000	
4							

## 線形計画法の例題 2

- ある工場の手持ちの材料

ねじ **36**

板 **12**

- 机と椅子に必要な材料

机 1 つあたり

ねじ **6**, 板 **1**

椅子 1 つあたり

ねじ **3**, 板 **2**

- 机は **4**万円, 椅子は **3**万円である. 売り上げを最大にしたい

## 線形計画法の例題 2

- 変数  $X$  と  $Y$  (**2変数**)
- 制約式

$$6X + 3Y \leq 36$$

$$X + 2Y \leq 12$$

- これら制約のもとで

**$40000 X + 30000 Y$  の最大値**

はいくらか？

$X=4, Y=4$  のとき

最大値 280000

	A	B	C	D	E
1	X	4	6	1	40000
2	Y	4	3	2	30000
3			36	12	280000