

wq-1. ポアソン分布、指数分布、アーラン分布

(待ち行列の数理)

<https://www.kkaneko.jp/cc/wq/index.html>

金子邦彦



アウトライン



1-1 離散分布と確率変数

1-2 ポアソン分布

1-3 連続分布

1-4 指数分布

1-5 アーラン分布

1-1 離散分布と確率変数

離散変数 X の確率分布

X が i ($\in \Omega$) となる確率

$$P(i) = \text{Prob}[X=i]$$

Ω : 有限個あるいは加算無限個の要素をもつ集合

X : Ω 上の値を取る **離散変数** (離散的確率変数)

確率変数 X の確率分布

$$P = \{P(i): i \in \Omega\}$$

例えば $P(0) = 0.1, P(1) = 0.6, P(2) = 0.3$ のとき, $P = \{0.1, 0.6, 0.3\}$

確率分布 P は,

$$0 \leq P(i) \leq 1$$

$$\sum P(i) = 1$$

を満足

平均と2乗平均



- 確率分布 P に従う確率変数 X の平均

$$E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot P(i)$$

- 確率分布 P に従う確率変数 X の2乗平均

$$E[X^2] = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \cdot P(i)$$

確率分布 P に従う**確率変数** X の**分散**

$$\begin{aligned}\text{Var}[X] &= \sum_{i=0}^{\infty} (i - E[X])^2 \cdot P(i) \\ &= E[X^2] - (E[X])^2\end{aligned}$$

1-2 ポアソン分布

ポアソン分布



- ランダムに事象が発生する
- 観測を始めてから, 時間 t 以内に k 個の事象が発生する確率を考えたい
- 時間 t 以内に発生する事象の回数は
離散変数である

- 時間 $(t, t + \Delta t)$ での事象の確率的法則が
 - 時刻 t に依存しない
 - 時刻 t 以前のジョブの数に無関係
- 時間 $(t, t + \Delta t)$ の間の発生確率が $\lambda \Delta t$ と書ける
- $\Delta t \rightarrow 0$ のとき, Δt の間に 2 つ以上の事象が発生しない

- 時間 $[0, t]$ 以内に k 個の事象が発生する確率
 - 時間 $[0, t]$ を整数 n で等分割
$$\Delta t = \frac{t}{n}$$
 - 1つの区間では, 2つ以上の事象が発生しないくらいに, 細かく分割
 - n 個の区間のうちに, k 個の区間で事象が発生する確率を求める

ポアソン分布の確率分布関数



- n 個の区間のうちに, k 個の区間で事象が発生する確率
 - $n-k$ 個の区間では, 事象が発生しない
 - 各区間で事象が発生する確率は $\lambda \Delta t$

$$\binom{n}{k} (\lambda \Delta t)^k (1 - \lambda \Delta t)^{n-k}$$

ポアソン分布の確率分布関数



$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} (\lambda \Delta t)^k (1 - \lambda \Delta t)^{n-k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{k! (n-k)!} (\lambda \Delta t)^k (1 - \lambda \Delta t)^{n-k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{k! (n-k)!} (\lambda t / n)^k (1 - \lambda t / n)^{n-k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{k! (n-k)!} (\lambda t / n)^k (1 - \lambda t / n)^n (1 - \lambda t / n)^{-k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} (1 - \lambda t / n)^n (1 - \lambda t / n)^{-k} \frac{n!}{(n-k)! n^k} \end{aligned}$$

ポアソン分布の確率分布関数



$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} (1 - \lambda t / n)^n (1 - \lambda t / n)^{-k} \frac{n!}{(n-k)! n^k}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} (1 - \lambda t / n)^n$$

$$= \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x)^{1/x} = e$$

- ・ **ポアソン分布** P に従う確率変数 X の 平均

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k (\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \\ &= (\lambda t) e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= (\lambda t) e^{-\lambda t} e^{\lambda t} \\ &= \lambda t \end{aligned}$$

ポアソン分布の 2 乗平均



- ・ **ポアソン分布** P に従う確率変数 X の **2 乗平均**

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot P(k) \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \cdot P(k) + \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(k) \\ &= (\lambda t)^2 + \lambda t \end{aligned}$$

ポアソン分布 P に従う確率変数 X の**分散**

$$\begin{aligned}\text{Var}[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ &= \lambda t\end{aligned}$$

例題



1 分あたり平均 0.5 人の客が来るとする
(但し, **ポアソン分布**). 10 分間に 5 人以上の客がくる確率を求めよ

- $\lambda = 0.5$ のポアソン分布になる

- $t = 10$ を $\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$ に代入

1-3 連続分布

確率分布が定まらない場合

- 実数値をとる**確率変数** X
 - X が特定の値をとる確率： 一般には無限小
 - **確率分布** $P = \{P(i): i \in \Omega\}$ は定まらない
- 以下, X は, 正または0の実数値をとるものとする

確率分布関数

- 確率変数 X の確率分布関数

$$F(x) = \text{Prob}[X \leq x]$$

確率分布関数 $F(x)$ は,

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

$$X_1 < X_2 \text{ ならば } F(x_1) \leq F(x_2)$$

$$F(0) = 0$$

$$F(\infty) = 1$$

を満足する

確率分布関数の意味



- **確率変数** X が, 区間 $(x, x + \Delta x]$ の値をとる確率

$$\begin{aligned} & \text{Prob}[x < X \leq x + \Delta x] \\ &= F(x + \Delta x) - F(x) \end{aligned}$$

確率密度関数



確率変数 X の確率密度関数

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \text{Prob}[x < X \leq x + \Delta x] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} F(x + \Delta x) - F(x) \\ &= \frac{dF(x)}{dx} \end{aligned}$$

- 確率密度関数 $f(x)$ に従う確率変数 X の平均

$$E[X] = \int_0^{\infty} x f(x) dx$$

- 確率密度関数 $f(x)$ に従う確率変数 X の分散

$$\text{Var}[X] = \int_0^{\infty} (x - E(x))^2 f(x) dx$$

1-4 指数分布

指数分布



- **ポアソン分布**（ランダムに事象が発生する）
において、**ある事象が起きてから、次の事象
が起きるまでの時間**を考える
- この「時間」の分布は、**指数分布**になる

ある事象が起きてから、次の事象が起きるまでの時間 t

$$F(t) = \text{Prob}[X \leq t]$$

$$= 1 - e^{-\mu t}$$

μ は処理率と呼ぶ

指数分布に従う確率変数 X の確率密度関数

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{dF(x)}{dx} \\ &= \mu e^{-\mu t} \end{aligned}$$

指数分布に従う確率変数 X の平均

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^{\infty} t f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} t \mu e^{-\mu t} dt \\ &= \left[-t \mu e^{-\mu t} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\mu t} dt \\ &= \frac{1}{\mu} \end{aligned}$$

指数分布に従う確率変数 X の分散

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^{\infty} \left(t - \frac{1}{\mu} \right)^2 f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} t^2 f(t) dt - \frac{2}{\mu} \int_0^{\infty} t f(t) dt + \frac{1}{\mu^2} \int_0^{\infty} f(t) dt \\ &= \left[-\frac{t^2}{\mu} e^{-\mu t} \right]_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} t e^{-\mu t} dt - \frac{2}{\mu} \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^2} \\ &= \frac{1}{\mu^2} \end{aligned}$$

- **ポアソン分布**において, 時刻 $t = 0$ から T までの間に**事象が起きない**確率

$$\text{Prob}[X > T] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^k e^{-\lambda T}}{k!} = e^{-\lambda T}$$

- これは $\lambda = \mu$ のときの**指数分布**と等しい

1-5 アーラン分布

- 2つの処理 A, B を連続して行う
 - A の処理時間は μ_a の指数分布
 - B の処理時間は μ_b の指数分布
- このときの, 処理時間の確率密度関数は？

アーラン分布の確率密度関数



$$f_c(t) = \text{Prob}[X_a + X_b = t]$$

$$= \int_0^t f_a(\tau) f_b(t - \tau) d\tau$$

$$= \int_0^t \mu_a e^{-\mu_a \tau} \mu_b e^{-\mu_b(t-\tau)} d\tau$$

$$= \begin{cases} -\frac{\mu_a \mu_b}{\mu_a - \mu_b} (e^{-\mu_a t} - e^{-\mu_b t}) & \mu_a \neq \mu_b \\ \mu_a t e^{-\mu_a t} & \mu_a = \mu_b \end{cases}$$

ランダム性は、情報通信の分析にも役立つ

- 交換器と通信トラフィックの数理について
 - ポアソン分布, 指数分布 – ランダム性を表す
 - 待ち行列 – 交換器の振る舞いを表す
 - アーランの即時式モデル – 交換器のモデル