wq-1. ポアソン分布，指数分布，アーラン分布

（待ち行列の数理）

URL: https://www.kkaneko.jp/cc/wq/index.html

金子邦彦

アウトライン

1-1 離散分布と確率変数

1-2 ポアソン分布

1-3 連続分布

1-4 指数分布

1-5 アーラン分布

1-1 離散分布と確率変数

離散変数の確率分布

離散変数 X の**確率分布**

Xが i （∈Ω）となる確率

P(i) = Prob[X=i]

Ω：有限個あるいは加算無限個の要素をもつ集合

X： Ω上の値を取る**離散変数**（離散的確率変数）

離散変数の確率分布

確率変数 X の**確率分布**

$$P = \{P(i): i \in \Omega\}$$

例えば　P(0) = 0.1, P(1) = 0.6, P(2) = 0.3 のとき，P = {0.1, 0.6, 0.3}

確率分布 P は，

$$0 \leqq P(i) \leqq 1$$

$$\Sigma P(i) = 1$$

を満足

平均と２乗平均

- **確率分布** P に従う**確率変数** X の**平均**

$$E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot P(i)$$

- **確率分布** P に従う**確率変数** X の**２乗平均**

$$E[X^2] = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \cdot P(i)$$

分散

確率分布 P に従う**確率変数** X の**分散**

$$\mathrm{Var}[X] = \sum_{i=0}^{\infty} (i - E[X])^2 \cdot P(i)$$

$$= E[X^2] - (E[X])^2$$

1-2 ポアソン分布

ポアソン分布

- ランダムに事象が発生する
- 観測を始めてから，時間 t 以内に k 個の事象が発生する確率を考えたい
- 時間 t 以内に発生する**事象の回数**は

  離散変数である

ポアソン分布の定義

- 時間 (t, t+⊿t) での事象の確率的法則が
  - 時刻 t に依存しない
  - 時刻 t 以前のジョブの数に無関係

    時間　(t, t+⊿t) の間の発生確率がλ⊿t と書ける
  - ⊿t → 0 のとき，⊿t の間に 2 つ以上の事象が発生しない

ポアソン分布の確率分布関数

- 時間 [0,　t] 以内に k 個の事象が発生する確率
  - 時間　[0, t] を整数 n で等分割

$$\Delta t = \frac{t}{n}$$

  - １つの区間では，２つ以上の事象が発生しないくらいに，細かく分割
  - n 個の区間のうちに，k 個の区間で事象が発生する確率を求める

ポアソン分布の確率分布関数

- n 個の区間のうちに， k 個の区間で事象が発生する確率
  - n-k 個の区間では，事象が発生しない
  - 各区間で事象が発生する確率は λ⊿t

$$\binom{n}{k} (\lambda \Delta t)^{k} (1 - \lambda \Delta t)^{n-k}$$

ポアソン分布の確率分布関数

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} (\lambda \Delta t)^{k} (1 - \lambda \Delta t)^{n-k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} (\lambda \Delta t)^{k} (1 - \lambda \Delta t)^{n-k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} (\lambda t / n)^{k} (1 - \lambda t / n)^{n-k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} (\lambda t / n)^{k} (1 - \lambda t / n)^{n} (1 - \lambda t / n)^{-k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\lambda t)^{k}}{k!} (1 - \lambda t / n)^{n} (1 - \lambda t / n)^{-k} \frac{n!}{(n-k)!\,n^{k}}$$

ポアソン分布の確率分布関数

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} (1 - \lambda t / n)^n (1 - \lambda t / n)^{-k} \frac{n!}{(n-k)!\, n^k}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} (1 - \lambda t / n)^n$$

$$= \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

$$\lim_{n \to \infty} (1 + x)^{1/x} = e$$

ポアソン分布の平均

- **ポアソン分布** P に従う確率変数 X の**平均**

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \quad (\lambda t)^k \, e^{-\lambda t}}{k!}$$

$$= (\lambda t)\, e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= (\lambda t)\, e^{-\lambda t} \, e^{\lambda t}$$

$$= \lambda t$$

ポアソン分布の２乗平均

- **ポアソン分布** P に従う確率変数 X の **２乗平均**

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot P(k)$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \cdot P(k) + \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(k)$$

$$= (\lambda t)^2 + \lambda t$$

ポアソン分布の分散

ポアソン分布 P に従う確率変数 X の**分散**

$$\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$= \lambda t$$

例題

１分あたり平均０．５人の客が来るとする（但し，**ポアソン分布**）．１０分間に５人以上の客がくる確率を求めよ

- λ = 0.5 のポアソン分布になる
- t = 10 を $\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$ に代入

1-3 連続分布

確率分布が定まらない場合

- 実数値をとる**確率変数** X
  - Xが特定の値をとる確率：　一般には無限小
  - **確率分布**　P ＝ {P(i): i∈ Ω}　は**定まらない**

- 以下，Xは，正または０の実数値をとるものと考える

確率分布関数

- **確率変数** X の**確率分布関数**

$$F(x) = \mathrm{Prob}[X \leqq x]$$

確率分布関数 F(x) は,

$$0 \leqq F(x) \leqq 1$$

$X_1 < X_2$ ならば $F(x_1) \leqq F(x_2)$

$$F(0) = 0$$

$$F(\infty) = 1$$

を満足する

確率分布関数の意味

- **確率変数** X が，区間（x, x+⊿x]の値をとる確率

  Prob[x < X ≦ x + ⊿x]

  = F(x+⊿x) − F(x)

確率密度関数

確率変数 X の**確率密度関数**

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \mathrm{Prob}[x < X \leqq x + \Delta x]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} F(x+\Delta x) - F(x)$$

$$= \frac{dF(x)}{dx}$$

平均と分散

- **確率密度関数** f(x) に従う**確率変数** X の**平均**

$$E[X] = \int_0^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

- **確率密度関数** f(x) に従う**確率変数** X の**分散**

$$Var[X] = \int_0^{\infty} (x - E(x))^2 f(x)\, dx$$

1-4 指数分布

指数分布

- **ポアソン分布**（ランダムに事象が発生する）において，**ある事象が起きてから，次の事象が起きるまでの時間**を考える

- この「時間」の分布は，**指数分布**になる

指数分布の確率分布関数

ある事象が起きてから，次の事象が起きるまでの時間　t

$$F(t) = \mathrm{Prob}[X \leqq t]$$

$$= 1 - e^{-\mu t}$$

μは処理率と呼ぶ

指数分布の確率密度関数

指数分布に従う確率変数 X の確率密度関数

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

$$= \mu e^{-\mu t}$$

指数分布の平均

指数分布に従う**確率変数** X の**平均**

$$E[X] = \int_0^{\infty} t\, f(t)\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} t\, \mu e^{-\mu t} dt$$

$$= \left[-t\, \mu e^{-\mu t} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\mu t} dt$$

$$= \frac{1}{\mu}$$

指数分布の分散

指数分布に従う**確率変数** X の**分散**

$$E[X] = \int_0^\infty \left(t - \frac{1}{\mu} \right)^2 f(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty t^2 f(t)\,dt - \frac{2}{\mu}\int_0^\infty t f(t)\,dt + \frac{1}{\mu^2}\int_0^\infty f(t)\,dt$$

$$= \left[- t^2 \mu e^{-\mu t} \right]_0^\infty + 2\int_0^\infty t\, e^{-\mu t}\,dt - \frac{2}{\mu}\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^2}$$

$$= \frac{1}{\mu^2}$$

ポアソン分布と指数分布

- **ポアソン分布**において，時刻 t = 0 から T までの間に<u>**事象が起きない**</u>確率

$$\mathrm{Prob}[X>T] = \left. \frac{(\lambda T)^k e^{-\lambda T}}{k!} \right|_{k=0}$$

$$= e^{-\lambda t}$$

- これはλ=μのときの**指数分布**と等しい

1-5 アーラン分布

アーラン分布

- 2つの処理A，Bを連続して行う
  - Aの処理時間はμa　の指数分布
  - Bの処理時間はμb　の指数分布
- このときの，処理時間の確率密度関数は？

アーラン分布の確率密度関数

$$f_c(t) = \mathrm{Prob}[\, X_a + X_b = t\,]$$

$$= \int_0^t f_a(\tau)\, f_b(t - \tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^t \mu_a e^{-\mu_a \tau}\ \mu_b e^{-\mu_b (t-\tau)}\, d\tau$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{\mu_a \mu_b}{\mu_a - \mu_b} \left(e^{-\mu_a t} - e^{-\mu_b t} \right) & \mu_a \neq \mu_b \\ \mu_a t\, e^{-\mu_a t} & \mu_a = \mu_b \end{cases}$$

ランダム性は，情報通信の分析にも役立つ

- 交換器と通信トラフィックの数理について
  - ポアソン分布，指数分布　　－　ランダム性を表す
  - 待ち行列　　　　　　　　　－　交換器の振る舞いを表す
  - アーランの即時式モデル　－交換器のモデル