数値積分

数値積分

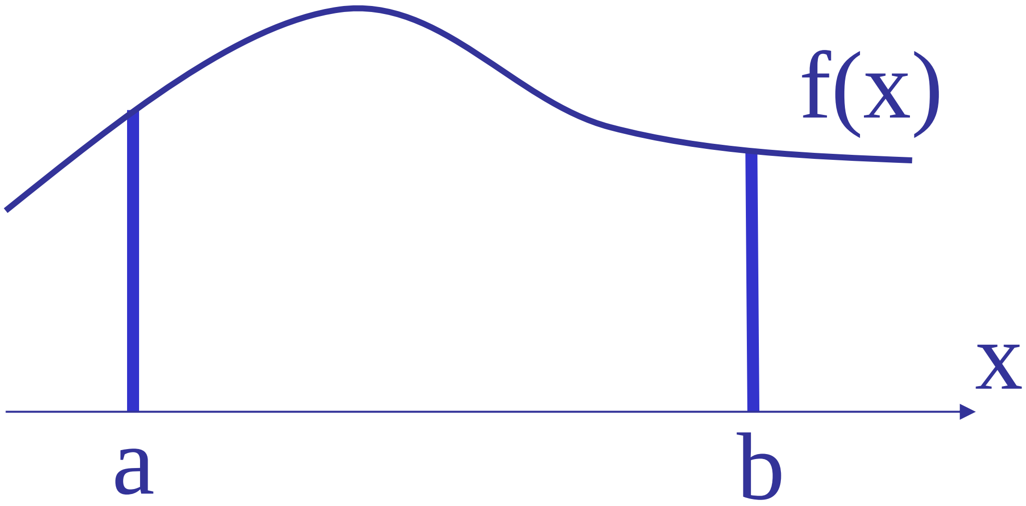
- 数値積分のプログラムを作る
  - 但し,

    積分したい関数　$f(x) = e^{-x^2}$

    積分区間:　$[a, b]$

    区間数:　n

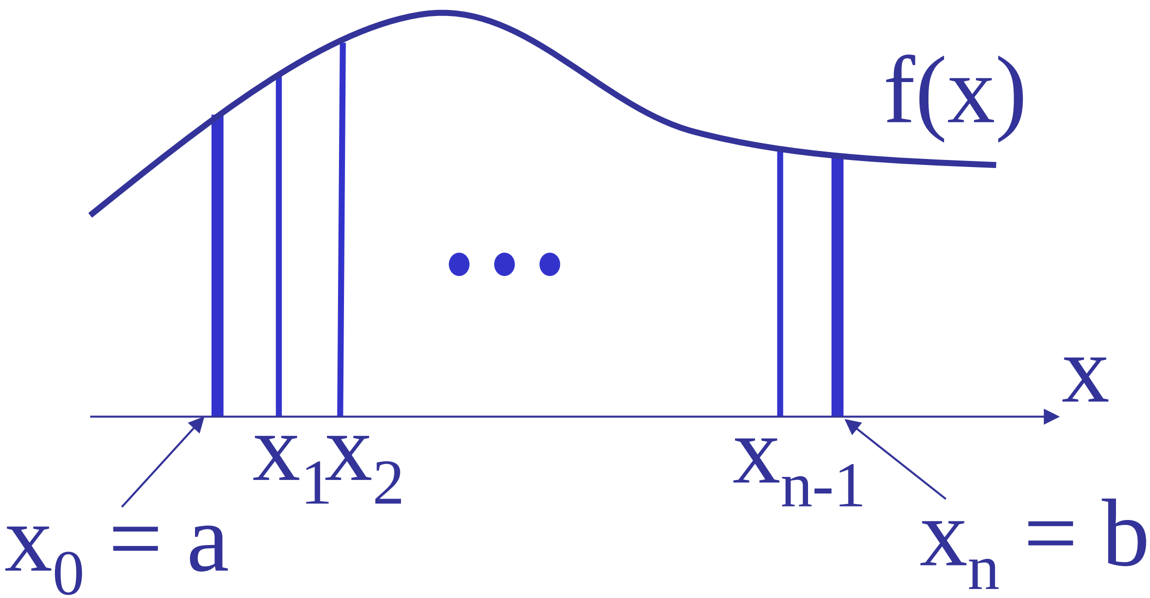
定積分



定積分: $\int_a^b f(x)dx$

区間 [a, b] で，連続関数 f, x軸, x=a, x=b で囲まれた面積

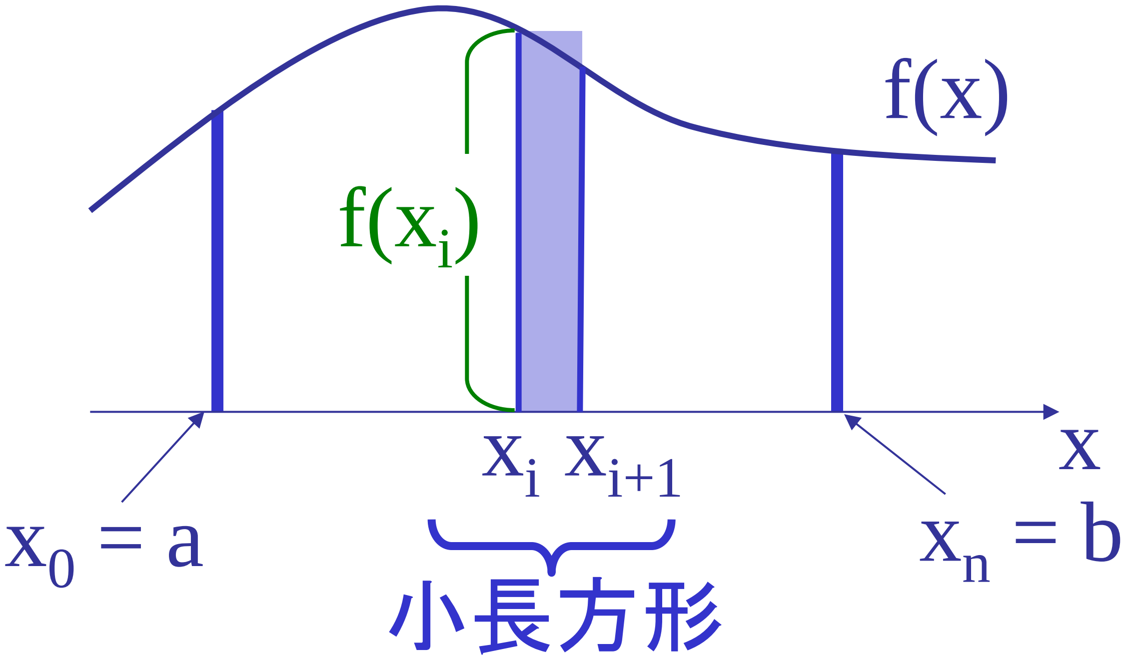
区間 [a, b] の小区間への分割



- n 個の等間隔な小区間に分割
  - 幅： $h = (b-a) / n$
  - 小区間： $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$

    但し，$x_0 = a,\ x_i = x_0 + i \times h$

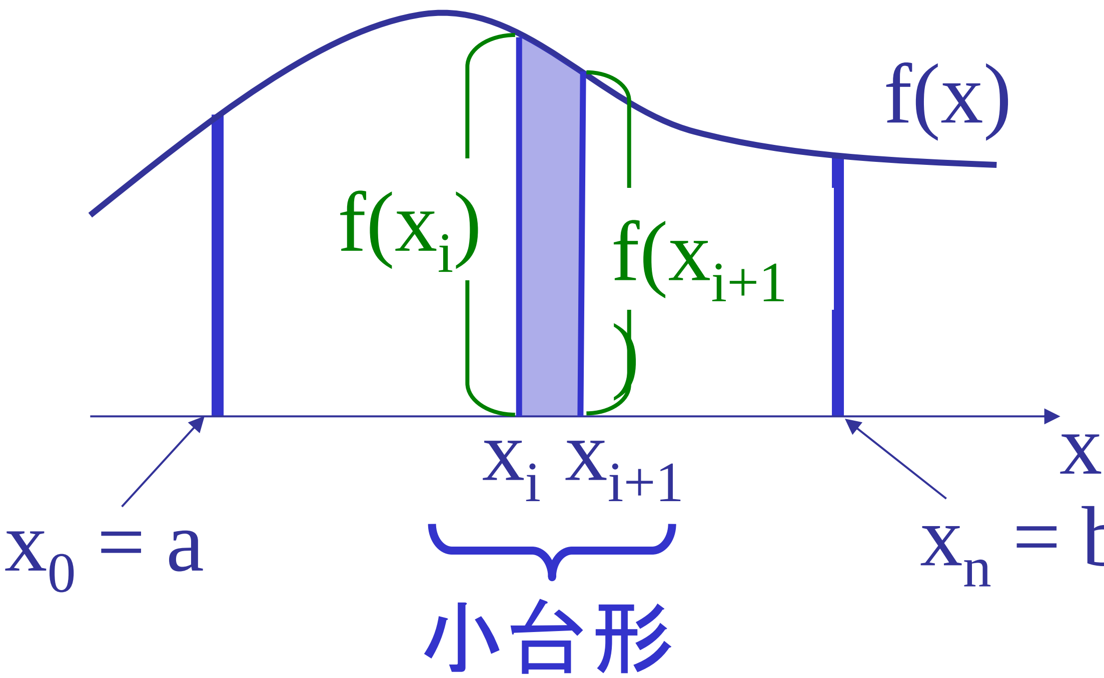
小長方形



- 小長方形の面積は

$$f(x_i)h$$

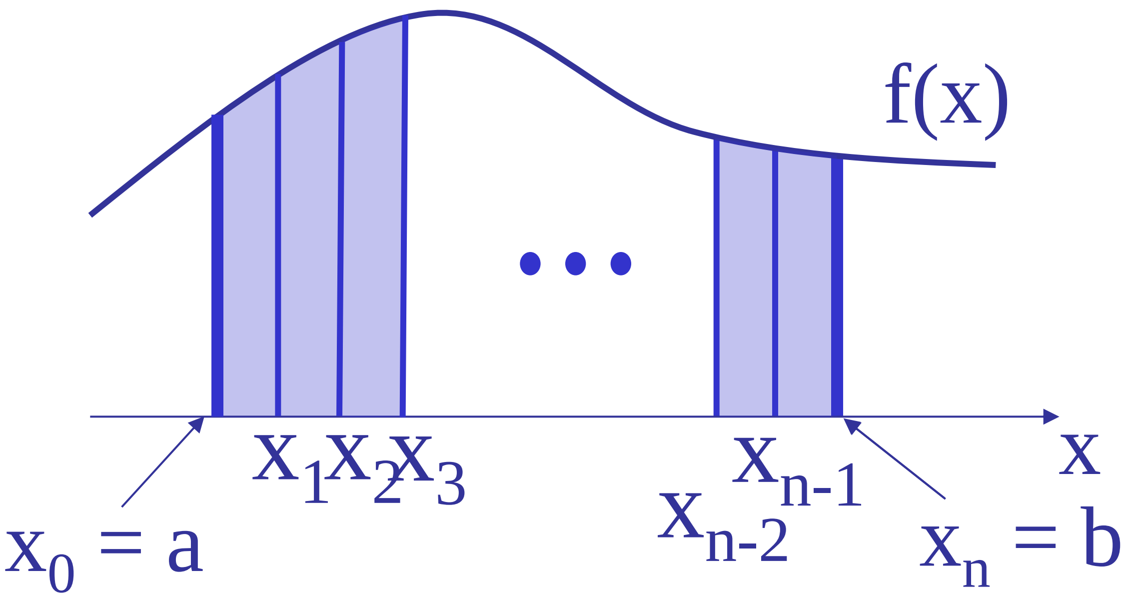
小台形



- 小台形の面積は

$$\frac{h}{2}(f(x_i)+f(x_{i+1}))$$

台形則 trapezoidal rule



- 小台形の面積の和は

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

- 定積分 I を, この和 S_n で近似　＝　台形則

台形則による数値積分

- 区間[a, b]をn 等分 (1区間の幅h=(b-a)/n)
- n 個の台形を考え, その面積の和 S_n で, 定積分 I を近似
  - f(x) が連続関数のときは, n を無限大に近づければ, S_n は I に近づく

$$I = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})) = \lim_{n \to \infty} S_n$$

- 但し, 単純に「n を大きくすればよい」とは言えない
  - n を大きくすると ⇒ 計算時間の問題, 丸め誤差の問題

数値積分の意味

- 式で書いてある関数の積分
  - ⇒ ごく限られた関数しか積分できない
- 定積分の「数値積分」が重要になる

数値積分の精度

- 分割幅を小さくするほど高精度
- 近似式の次数が高いほど高精度

　　台形則：区間を直線（１次式）により近似

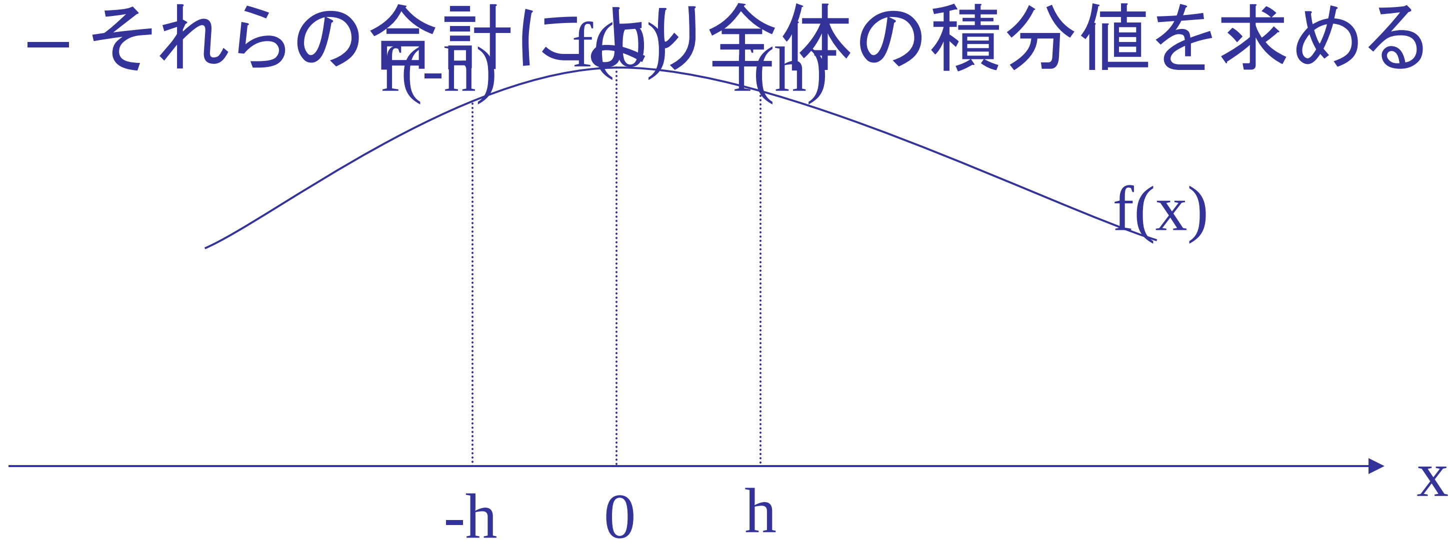
- 台形則より次数が１高い近似の手法

　　→ Simpson則

　　区間を２次曲線により近似

Simpson則

- 積分値$\int_a^b f(x)dx$ を計算(関数f(x)をある区間[a,b] で積分)
  - 積分区間を単位(幅2h)に分割
  - 各単位を二次曲線で近似
    - 座標 (-h,f(-h)), (0,f(0)), (h,f(h)) の3点を通る二次曲線
  - 区間 -h～h までの積分を計算
  - それらの合計により全体の積分値を求める



Simpsonの公式

- 3点を通る二次曲線 $f(x)=Ax^2+Bx+C$ の区間 $[-h,h]$ での積分

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx = \int_{-h}^{h} (Ax^2+Bx+C)dx$$

$$= h(2Ah^2+6C)/3$$

$$= h[(Ah^2-Bh+C)+4C+(Ah^2+Bh+C)] / 3$$

$$= h(f(-h)+4f(0)+f(h)) / 3$$

Simpsonの公式

積分値$\int_a^b f(x)dx$ の計算手順

- x=a から x=b までを n 等分し，その幅を2h(=(b-a)/n)とする

$$\int_a^b f(x)dx \quad = h[f(a)+4f(a+h)+f(a+2h)$$
$$+f(a+2h)+4f(a+3h)+f(a+4h)$$
$$+\cdots$$
$$+f(a+(n-2)h)+4f(a+(n-1)h)+f(a+nh)]/3$$
$$=h[f(a)+f(a+nh)$$
$$+4(f(a+h)+f(a+3h)+\cdots+f(a+(n-1)h))$$
$$+2(f(a+2h)+f(a+4h)+\cdots+f(a+(n-2)h))]/3$$

これで積分値が求まる

Simpson公式のプログラム

- 積分区間と分割数を読み込んで，Simpson公式による数値積分を行う
  - 関数f(x) はプログラム中に記述

```c
#include <stdio.h>
#include <math.h>
double f(double x)
{
  return exp(-x*x);
}
main()
{
    int i, num;
    double S, a, b, x, d;
    char buf[100];

    printf("積分区間(a〜b) : ");
    fgets(buf, 100, stdin);
    sscanf(buf, "%lf %lf", &a, &b);
    printf("分割数(偶数) : ");
    fgets(buf,100,stdin);
    sscanf(buf, "%d", &num);
    d = (b - a) / num;    /* 分割幅 */
    S = f(a) + f(b);
    for(i = 1 ; i < num ; i = i + 2){
        x = a + d * i;
        S = S + 4 * f(x);
    }
    for(i = 2 ; i < num ; i = i + 2){
        x = a + d * i;
        S = S + 2 * f(x);
    }
    S = S * d / 3;          /* 面積 */
    printf("面積 = %lf¥n", S);
}
```

実行結果

$f(x) = \exp(-x^2)$

積分区間(a～b) : 0　1
分割数 : 1000
面積 = 0.746824

積分区間(a～b) : 0　10
分割数 : 1000000
面積 = 0.886277

練習問題1

- 台形則を使って，次を計算せよ

$$\log_e 2 = \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx$$

- 計算結果を，以下と比較せよ

log 2 は，およそ 0.693147180559945

練習問題2

- 練習問題1について，区間数 n を，n = 4, 8, 16, 32, 64, 128 と変えて計算を行い，刻み幅と誤差の関係を調べよ（A）
  - 区間数 n と誤差の関係を書いたグラフを作成せよ
  - この場合，おおよそ次の関係が成り立っていることを確認せよ

$$Sn - I \approx \frac{c}{n^2}$$ （c は定数）