



cp-10. 末尾再帰関数と多重再帰関数

(C プログラミング入門)

URL: <https://www.kkaneko.jp/pro/adp/index.html>

金子邦彦





内容

例題 1 . フィボナッチ数列

例題 2 . McCarthyの91関数

例題 3 . Ackermann関数

例題 4 . 総和を求める末尾再帰関数



- 2個以上の再帰呼出しを含む再帰関数（多重再帰関数）のプログラムを読み，再帰関数について理解を深める
- 繰り返し文を使ったプログラムを，末尾再帰関数の形に書き直すことができるようになる

2個以上の再帰呼出しを含む 多重再帰関数



関数Fの本体に, Fの再帰呼出しを2個以上書いてもよい.

例)

- ハノイの塔
- フィボナッチ数列
- McCarthyの91関数
- Ackermann関数



例題 1. フィボナッチ数列

- フィボナッチ数列

$$f_0 = 1,$$

$$f_1 = 1,$$

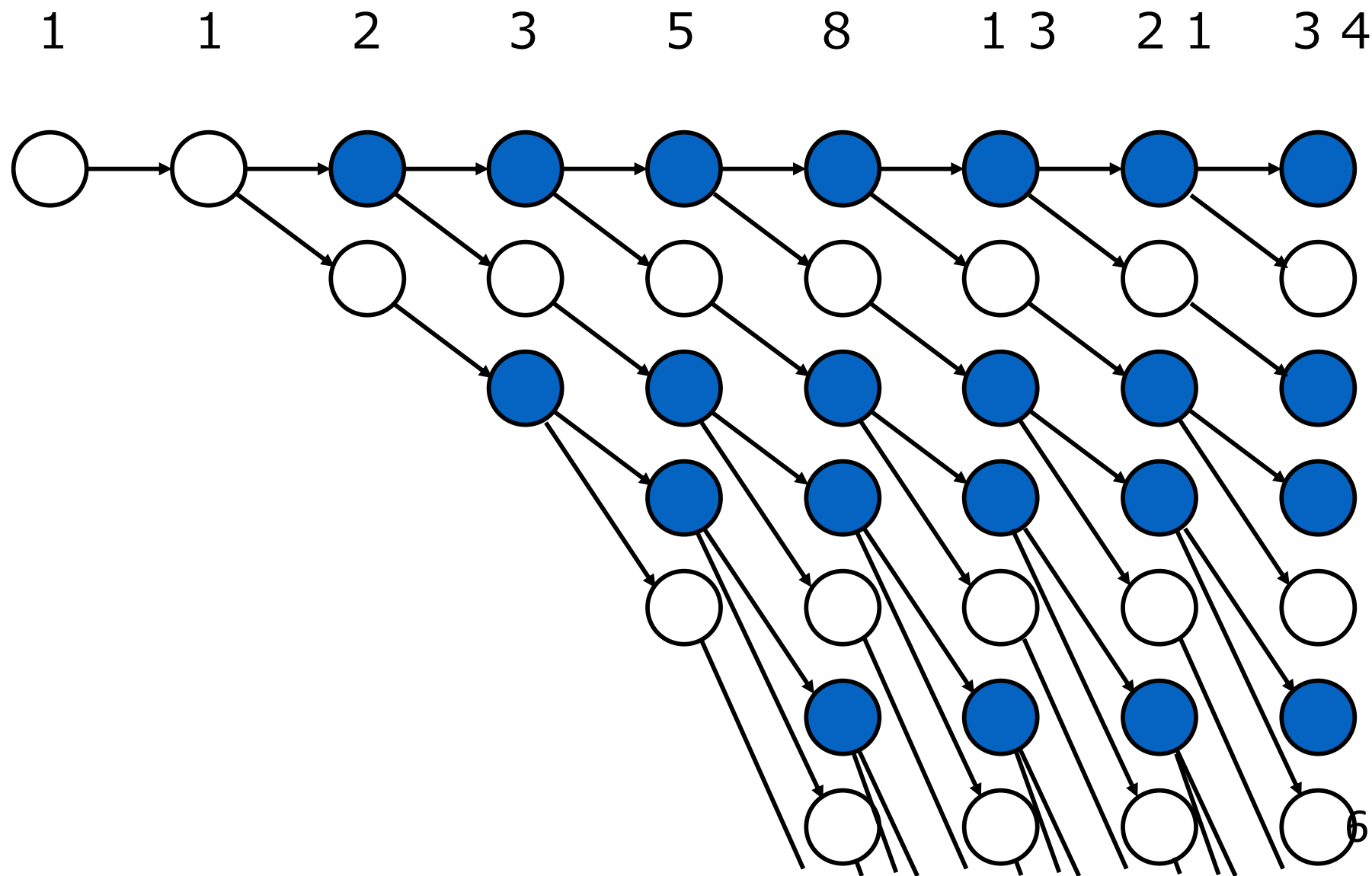
$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} (n > 1)$$

の i 番目の数 を計算するプログラムを,
再帰関数を用いて作る

例) 1, 1, 2, 3, 5, f_i , 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,

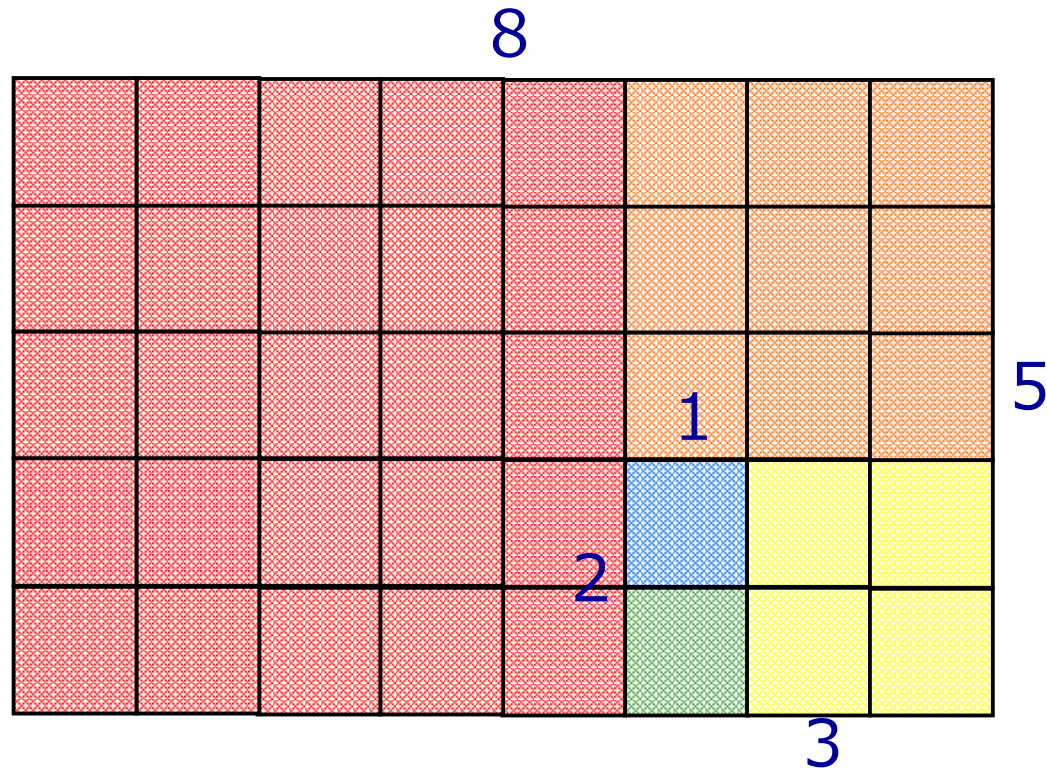


フィボナッチ数列





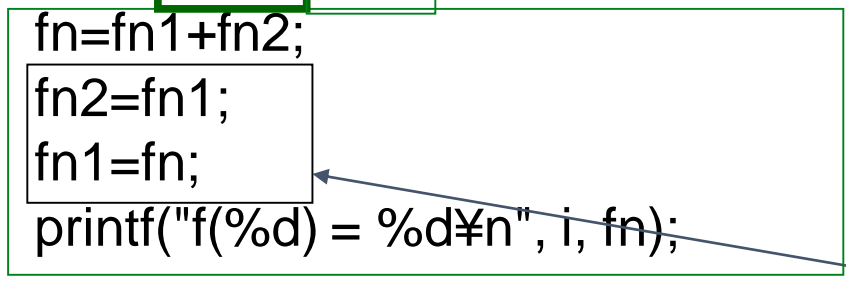
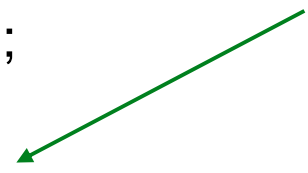
フィボナッチ数列



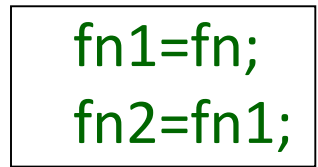


```
#include <stdio.h>
#pragma warning(disable:4996)
int main()
{
    int i;
    int n;
    int fn;
    int fn1;
    int fn2;
    printf("n=");
    scanf("%d", &n);
    fn1 = 1;
    fn2 = 1;
    for (i=2; i<=n; ++i) {
        fn=fn1+fn2;
        fn2=fn1;
        fn1=fn;
        printf("f(%d) = %d¥n", i, fn);
    }
    return 0;
}
```

条件式



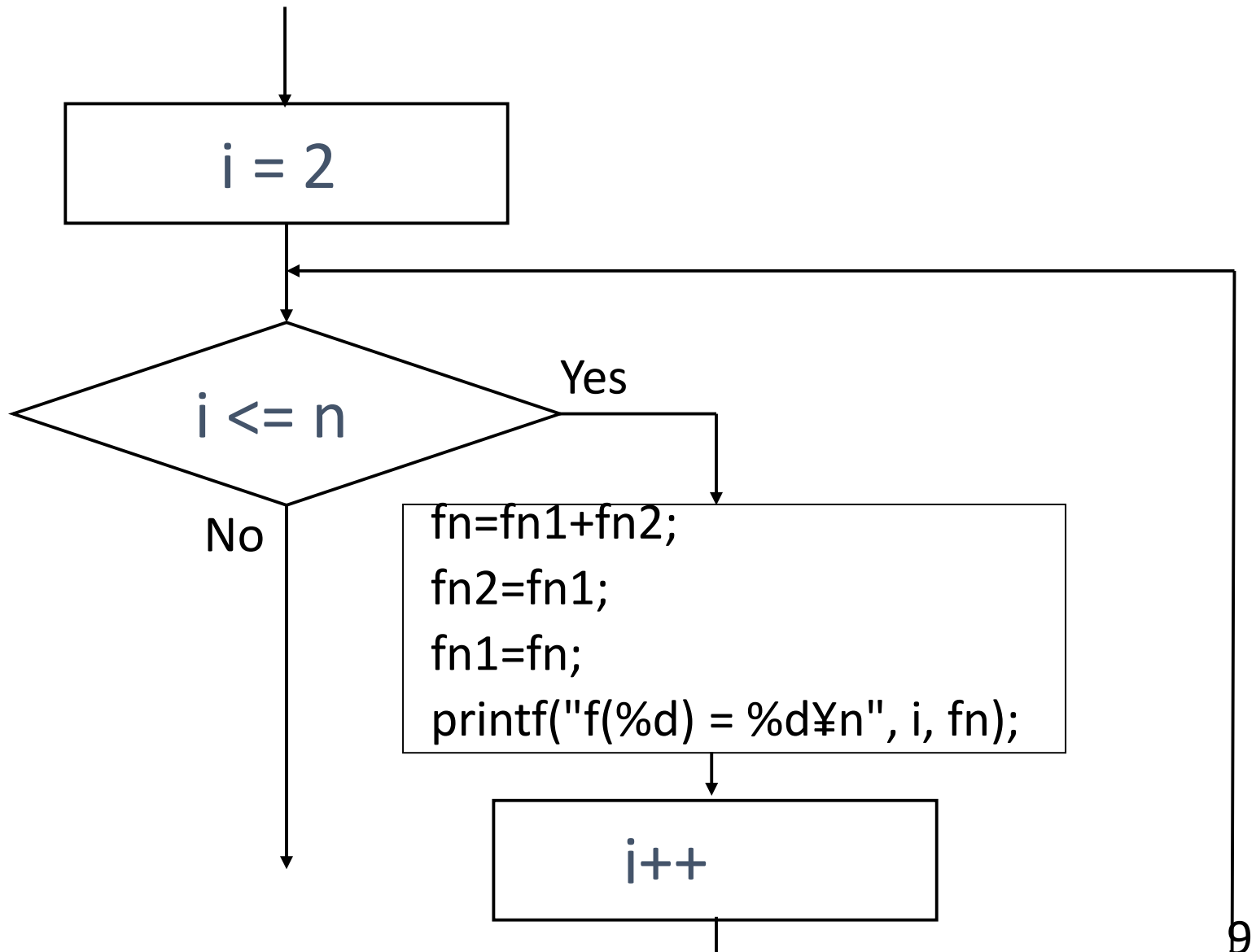
条件が成り立つ限り、
実行されつづける部分
順番に意味がある。



とはしないこと



「繰り返し」によるフィボナッチ数列



「繰り返し」によるフィボナッチ数列



$n = 5$ とすると

$i = 2$

$i \leq 5$ が成立する $f_n = 1 + 1; f_{n2} = 1; f_{n1} = 2$

$i = 3$

$i \leq 5$ が成立する $f_n = 2 + 1; f_{n2} = 2; f_{n1} = 3$

$i = 4$

$i \leq 5$ が成立する $f_n = 3 + 2; f_{n2} = 3; f_{n1} = 5$

$i = 5$

$i \leq 5$ が成立する $f_n = 5 + 3; f_{n2} = 5; f_{n1} = 8$

$i = 6$

$i \leq 5$ が成立しない

f_i が入る f_{i-1} が入る f_i が入る



```
#include <stdio.h>
#pragma warning(disable:4996)
int fib(int n)
{
    if (n<=1) {
        return 1;
    }
    else {
        return fib(n-1)+fib(n-2);
    }
}
int main()
{
    int n;
    int fn;
    printf("Enter a number: ");
    scanf("%d",&n);
    fn = fib(n);
    printf("Fib(%d)=%d\n",n ,fn);
    return 0;
}
```



フィボナッチ数列

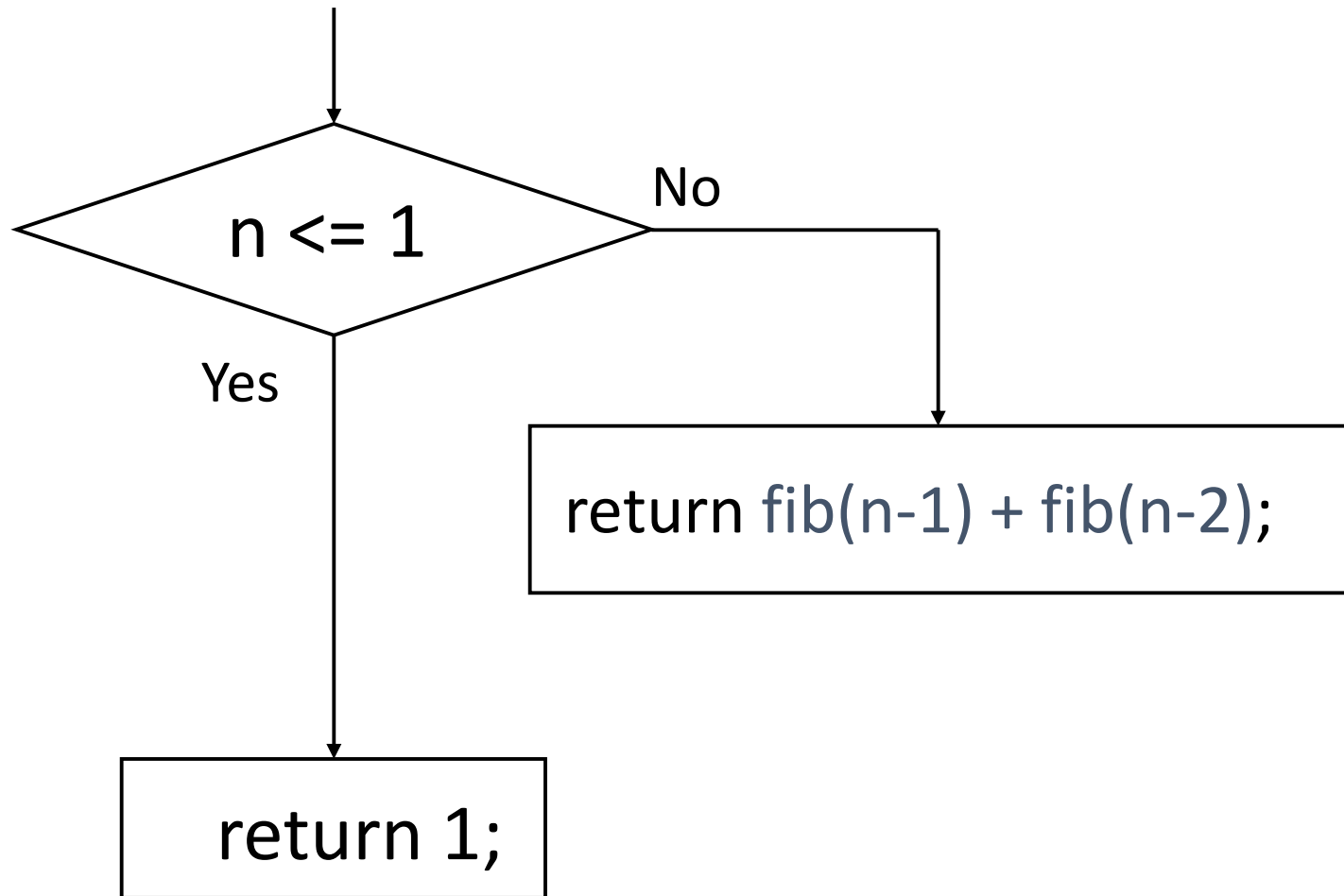
実行結果の例

Enter a number: 5

Fib(5)=8



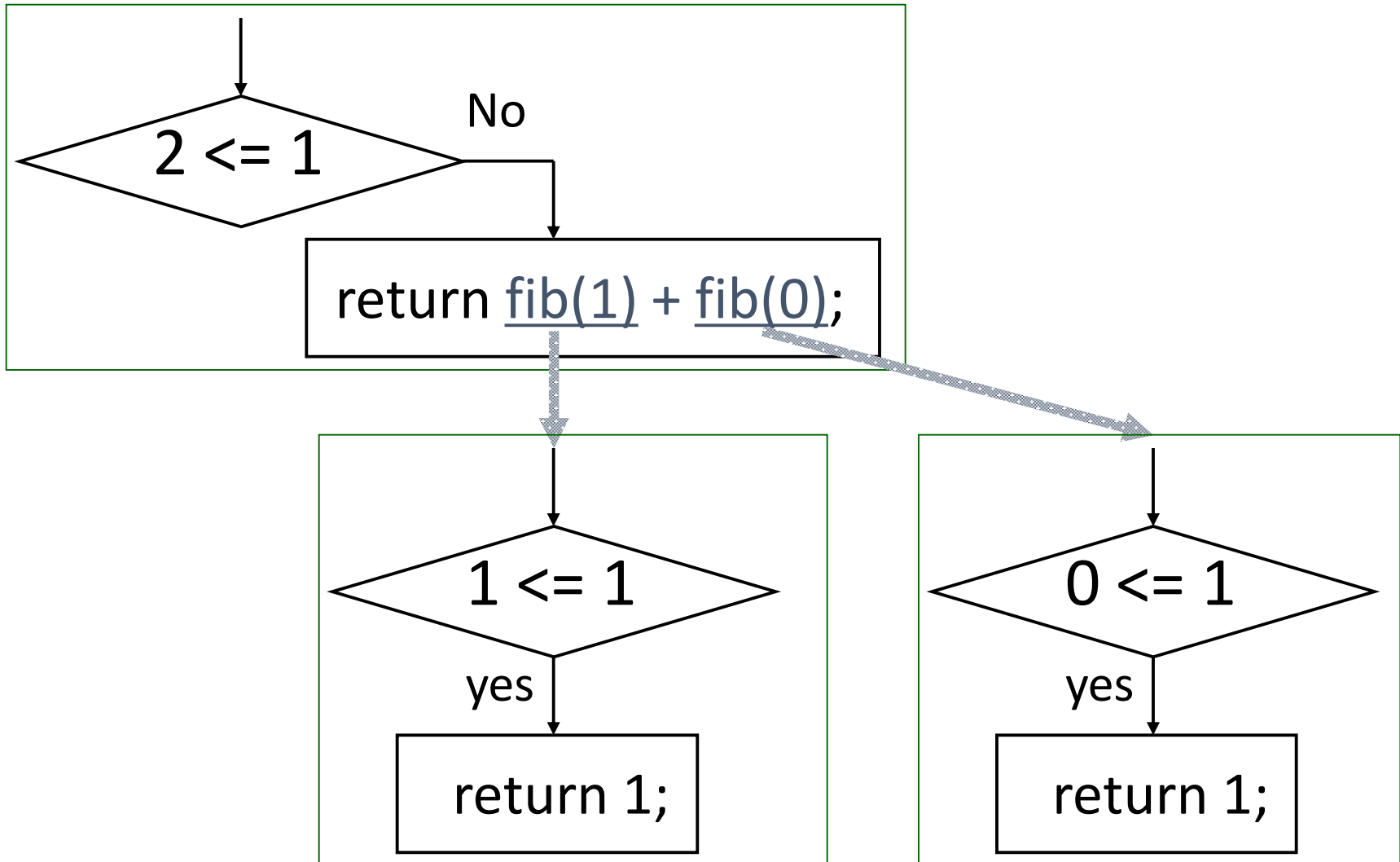
「再帰」によるフィボナッチ数列



「再帰」によるフィボナッチ数列 — n=2 のときの実行順 —



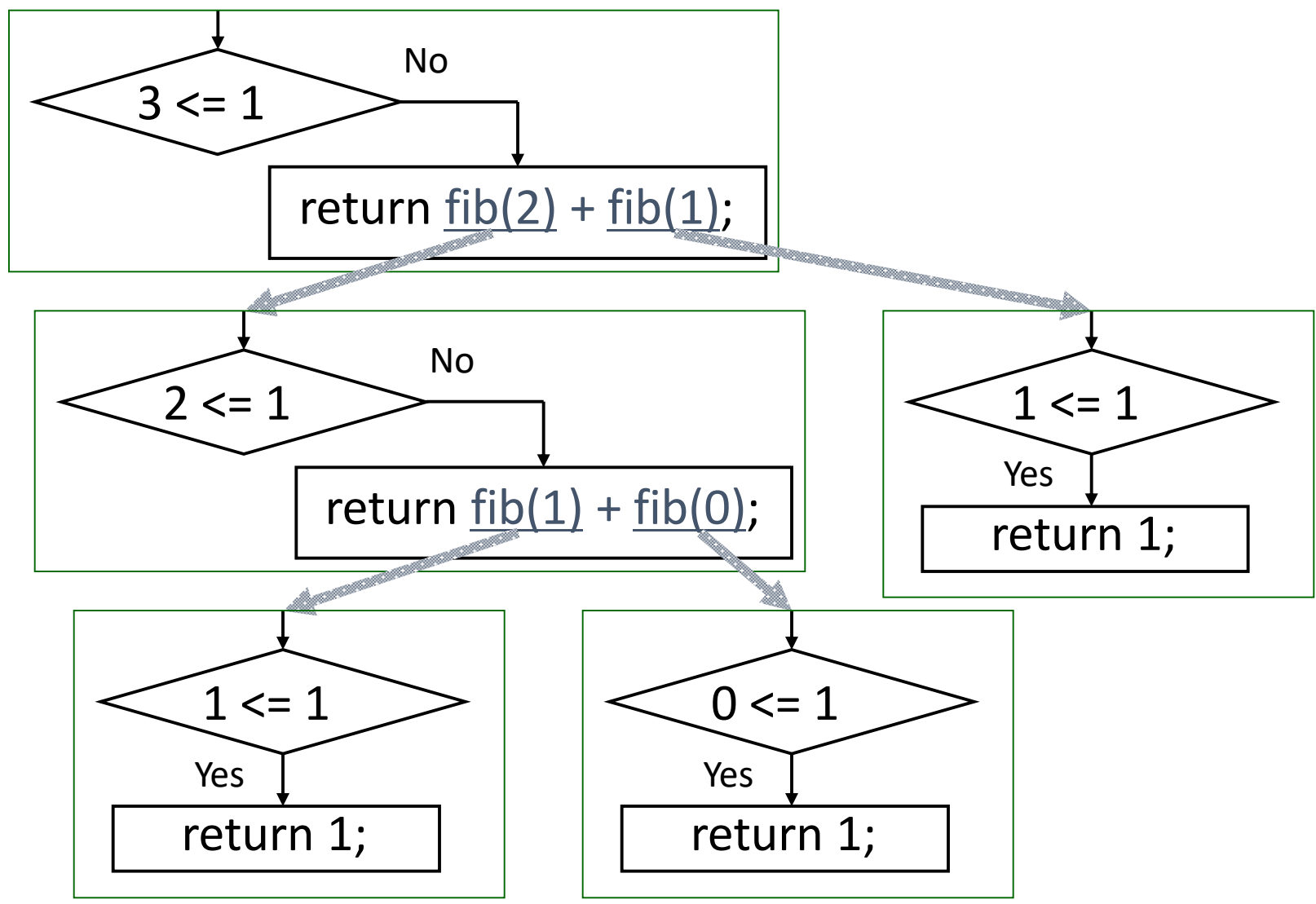
n=2 とすると





「再帰」によるフィボナッチ数列 — n=3 のときの実行順 —

n=3 とすると



フィボナッチ数列の特性



- どれだけ大きな引数まで計算できるか調べてみよう.
- 引数を大きくするに従って, 計算時間はどう変化するか調べてみよう.

例題 2 . McCarthyの91関数



- McCarthyの91関数

$$Mc(n) = \begin{cases} n-10 & \text{if } n > 100, \\ Mc(Mc(n+11)) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

の n 番めの数を計算するプログラムを, 再帰関数を用いて作る.



```
#include <stdio.h>
#pragma warning(disable:4996)
int mc91(int n)
{
    if (n>100) {
        return n-10;
    }
    else {
        return mc91(mc91(n+11));
    }
}
int main()
{
    int n;
    int mc;
    printf("Enter a number: ");
    scanf("%d",&n);
    mc = mc91(n);
    printf("mc91(%d)=%d\n",n ,mc );
    return 0;
}
```



McCarthyの91関数

実行結果の例

Enter a number: 20

mc91(20)=91

McCarthyの91関数の意義



- 本来のMcCarthyの91関数の定義は、再帰的な定義
- しかし、McCarthyの91関数の実際の値は単純
⇒ 100までの値を入れて、実際に計算させると、結果は「91」
- McCarthyの91関数は、人工知能（プログラム理解、自動証明、記号処理など）の、良い例題とされてきた

課題 1 . McCarthyの91関数の特性

- いろいろな数に対して, **mc91** 関数の返す値を調べよ.
- 次の**非**再帰関数**m91**で, **mc91** 関数を置き換えて, 同様に調べよ.

```
int m91(int n)
{
    if ( n>100 ) {
        return n-10;
    }
    else {
        return 91;
    }
}
```

例題 3 . Ackermann関数



- Ackermann関数

$$Ack(m,n)=\begin{cases} n+1 & \text{if } m=0, \\ Ack(m-1,1) & \text{if } n=0, \\ Ack(m-1,Ack(m,n-1)) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

を計算するプログラムを，再帰関数を用いて書く．



```
#include <stdio.h>
#pragma warning(disable:4996)
int ack(int m, int n)
{
    if (m==0) {
        return n+1;
    }
    else if (n==0) {
        return ack(m-1,1);
    }
    else {
        return ack(m-1,ack(m,n-1));
    }
}
int main()
{
    int n;
    int m;
    int a;
    printf("m=");
    scanf("%d",&m);
    printf("n=");
    scanf("%d",&n);
    a = ack(m,n);
    printf("Ack(%d,%d)=%d\n",m ,n ,a);
    return 0;
}
```



Ackermann関数

実行結果の例

$m=2$

$n=4$

$Ack(2,4)=11$



$m=1$ のときのAckermann関数

- アッカーマン関数の定義

- $Ack(0, n) = n + 1$

- $Ack(m, 0) = Ack(m-1, 1)$

- $Ack(m, n) = Ack(m-1, Ack(m, n-1))$

- $m=1$ とすると

- $Ack(1, 0) = Ack(0, 1) = 1 + 1 = 2$

- $Ack(1, 1) = Ack(0, Ack(1, 0)) = Ack(0, 2) = 2 + 1 = 3$

- $Ack(1, 2) = Ack(0, Ack(1, 1)) = Ack(0, 3) = 3 + 1 = 4$

数学的帰納法を使って, $Ack(1, n) = n + 2$ を証明することは
簡単

Ackermann関数の再帰の回数



- $m=0$

- $Ack(0, 4) = 5$

- 再帰 : 1回

- $Ack(0, 8) = 9$

- 再帰 : 1回

- $Ack(0, 12) = 13$

- 再帰 : 1回

- $m=1$

- $Ack(1, 4) = 6$

- 再帰 : 10回

- $Ack(1, 8) = 10$

- 再帰 : 18回

- $Ack(1, 12) = 14$

- 再帰 : 26回

- $m=2$

- $Ack(2, 4) = 11$

- 再帰 : 65回

- $Ack(2, 8) = 19$

- 再帰 : 189回

- $Ack(2, 12) = 27$

- 再帰 : 377回

- $m=3$

- $Ack(3, 4) = 125$

- 再帰 : 10307回

- $Ack(3, 8) = 2045$

- 再帰 : 2785999回

(関数 ack を呼び出した回数)



Ackermann関数の意義

- Ackermann関数のプログラムは、「関数の再帰呼び出し」を使って、書くことができた
- しかし、 m が少し大きくなると、Ackermann関数の値が爆発（つまり再帰の回数も爆発）して、事実上、計算不可能
- しかも、Ackermann関数は、「普通の繰り返し文では書けない」ことが証明されている（このことを、「原始帰納的でない」という）

課題 2 . Ackermann関数の特性



- どれだけ大きな引数まで計算できるか調べよ.
- 引数を大きくするに従って, 計算時間はどう変化するか調べよ.

課題 3



- フィボナッチ数列, McCarthyの91関数, Ackermann関数で, return文の直前で戻り値を表示させ, 計算の様子を調べよ.



例題 4 . 総和を求める末尾再帰関数

- 総和を求める関数を，末尾再帰関数の形で書く
 - 末尾再帰関数については，次ページ以降で説明



```
#include <stdio.h>
#pragma warning(disable:4996)
int sum(int n, int s)
{
    if (n==0) {
        return s;
    }
    else {
        return sum(n-1,n+s);
    }
}
int main()
{
    int n;
    int souwa;
    printf("Enter a number: ");
    scanf("%d",&n);
    souwa = sum(n, 0);
    printf("sum(%d)=%d¥n",n, souwa);
    return 0;
}
```

} return 文の中でのみ
再帰呼び出し

関数呼び出しの流れ

(main 関数で $n = 2$ のとき)



main 関数

```
int main()
```

関数呼び出し

```
sum(n, 0);
```

sum 関数

```
int sum( int n, int s )
```

関数呼び出し
と戻り

```
return sum(n-1,n+s);
```

sum 関数

```
int sum( int n, int s )
```

関数呼び出し
と戻り

```
return sum(n-1,n+s);
```

sum 関数

```
int sum( int n, int s )
```

戻り

```
return s;
```




n と s の値の変化 (main 関数で n = 2 のとき)

main 関数

```
int main()
```

sum 関数

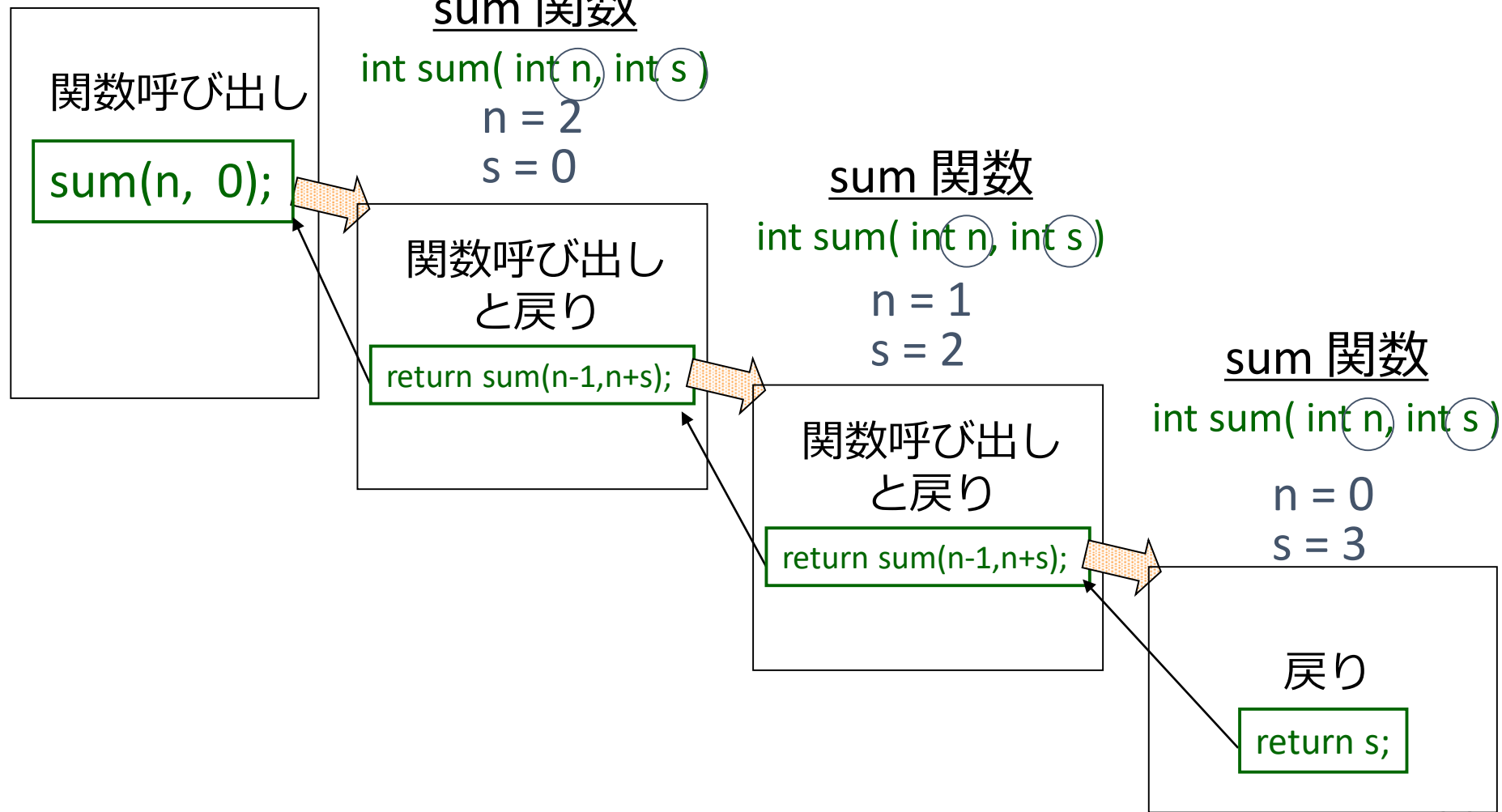
```
int sum( int n, int s )  
n = 2  
s = 0
```

sum 関数

```
int sum( int n, int s )  
n = 1  
s = 2
```

sum 関数

```
int sum( int n, int s )  
n = 0  
s = 3
```





末尾再帰関数とは

- 再帰関数の中で、一番最後（つまり return 文など）で、ただ1度だけ、その本体の再帰呼び出しを行うもの
 - 再帰呼び出しを行ったら、その関数がすぐに終わる
 - 再帰呼び出しの結果（戻り値）を得たら、その関数自体の戻り値として、直接戻す
- 「末尾再帰関数」と、「繰り返し文を使ったプログラム（再帰関数の無いもの）」とは、互いに、簡単に書き直せる

再帰関数と末尾再帰関数



- 再帰関数で、末尾再帰関数に書き直すことができるもの
 - 整数の総和, 階乗, フィボナッチ数列など
- 再帰関数で、末尾再帰関数に書き直すことができないもの
 - Ackermann関数など



末尾再帰の計算の方法

- 途中結果を引数に与えて、関数の再帰呼び出しを行う。
- 最後の再帰呼び出しでは、与えられた途中結果を最終結果として返す

例)

		2+0
→ s(2,0)	↓	1+2
	→ s(1,2)	↓
		→ s(0,3)
		→ 3



課題 4

次の階乗関数を，末尾再帰の形に書き直せ．また，書き直した階乗関数を使う main 関数を書き，正しく動作することを確認すること．

```
int factorial( int n )
{
    int result = 1;
    int i;
    for( i = 1; i <= n; i++ ) {
        result = i * result;
    }
    return result;
}
```



課題 4 について

- 末尾再帰で無い例 :

```
return n * factorial( n-1 );
```

```
return factorial( n-1 ) * n;
```

いずれも, `factorial(n-1)` の返り値を使って, `n` との掛け算を行っている

- 末尾再帰にするには :

途中結果を引数に含めること

```
例) return factorial( n-1, n*s );
```



課題 5

- フィボナッチ数列を末尾再帰の形で書け.

ヒント： 一歩前の途中結果 f_{k-1} と、二歩前の途中結果 f_{k-2} の二つを引数に加えて、再帰呼び出しする.