



# ce-12. ニュートン法による方程式の求解

(C プログラミング応用) (全14回)

URL: <https://www.kkaneko.jp/pro/c/index.html>

金子邦彦





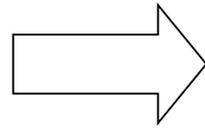
# ニュートン法による求解

# ニュートン法



- ニュートン法による非線形方程式  $f(x) = 0$  の求解

入力：関数  $f$  と,  
初期近似値  $x_0$



出力： $f(x) = 0$  の  
近似解の1つ

再帰による繰返し計算により,  $x_1, x_2 \dots$  を求める  
(手順は次ページ)

⇒ 収束すれば, 解の近似値が得られる  
(注) 収束しない場合もありえる

# ニュートン法



- 初期近似値  $x_0$  から出発
- 反復公式

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

を繰り返す

- $x_1, x_2, x_3 \dots$  は, 徐々に解に近づいていく (と期待できる)

# ニュートン法



- 初期近似値  $x_0$  から出発
- 反復公式

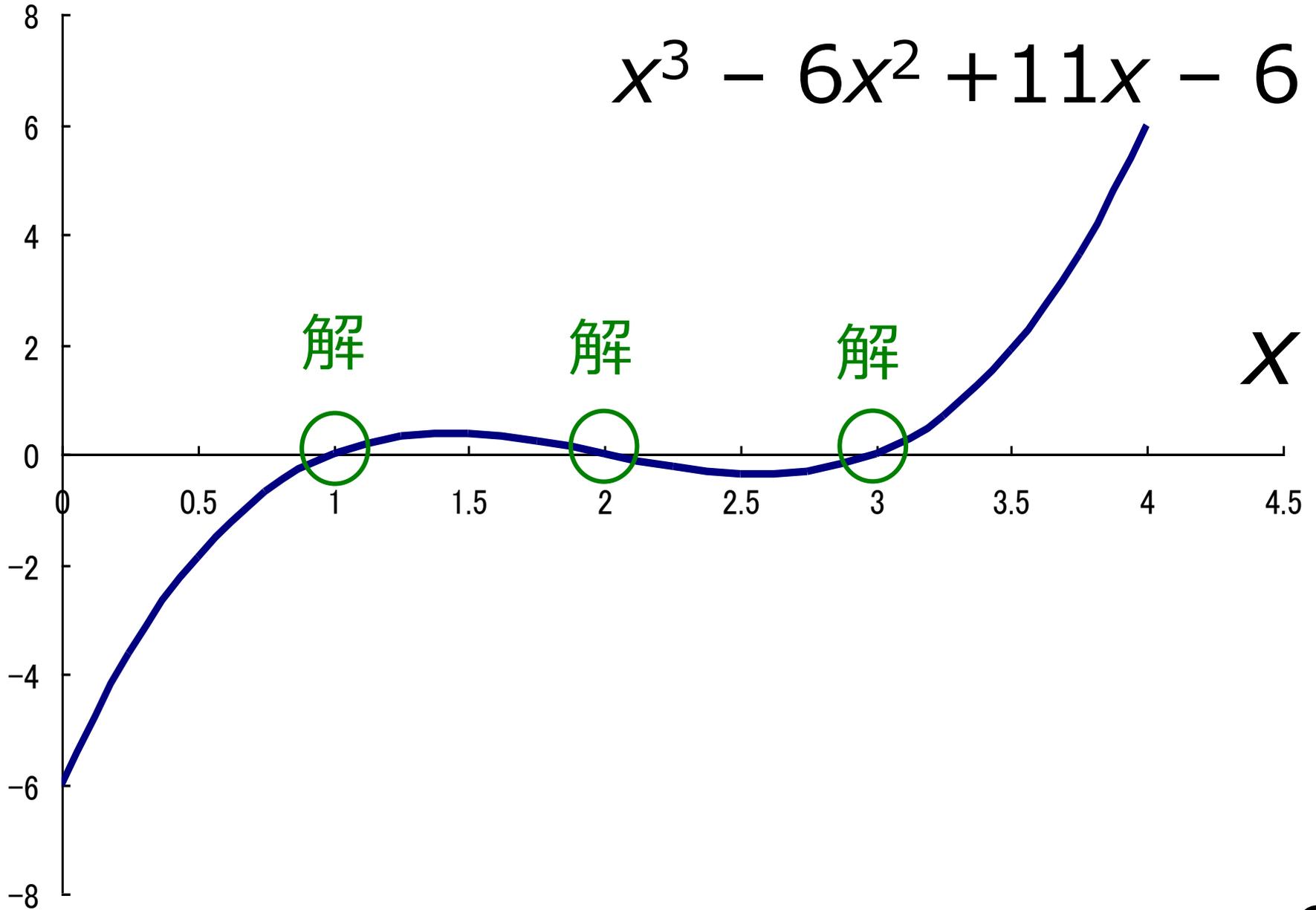
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

を繰り返す

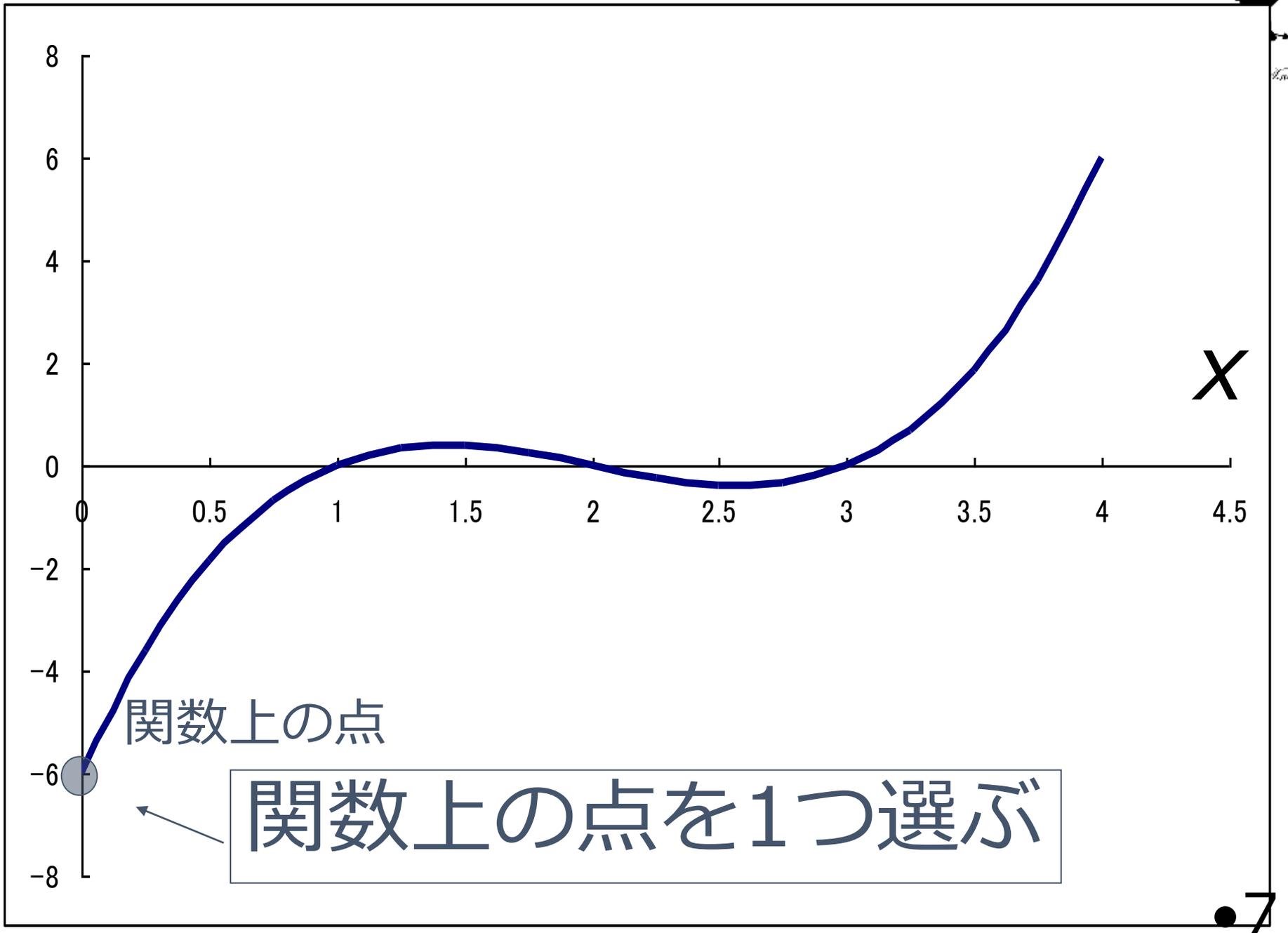
- $x_1, x_2, x_3 \dots$  は, 徐々に解に近づいていく (と期待できる)

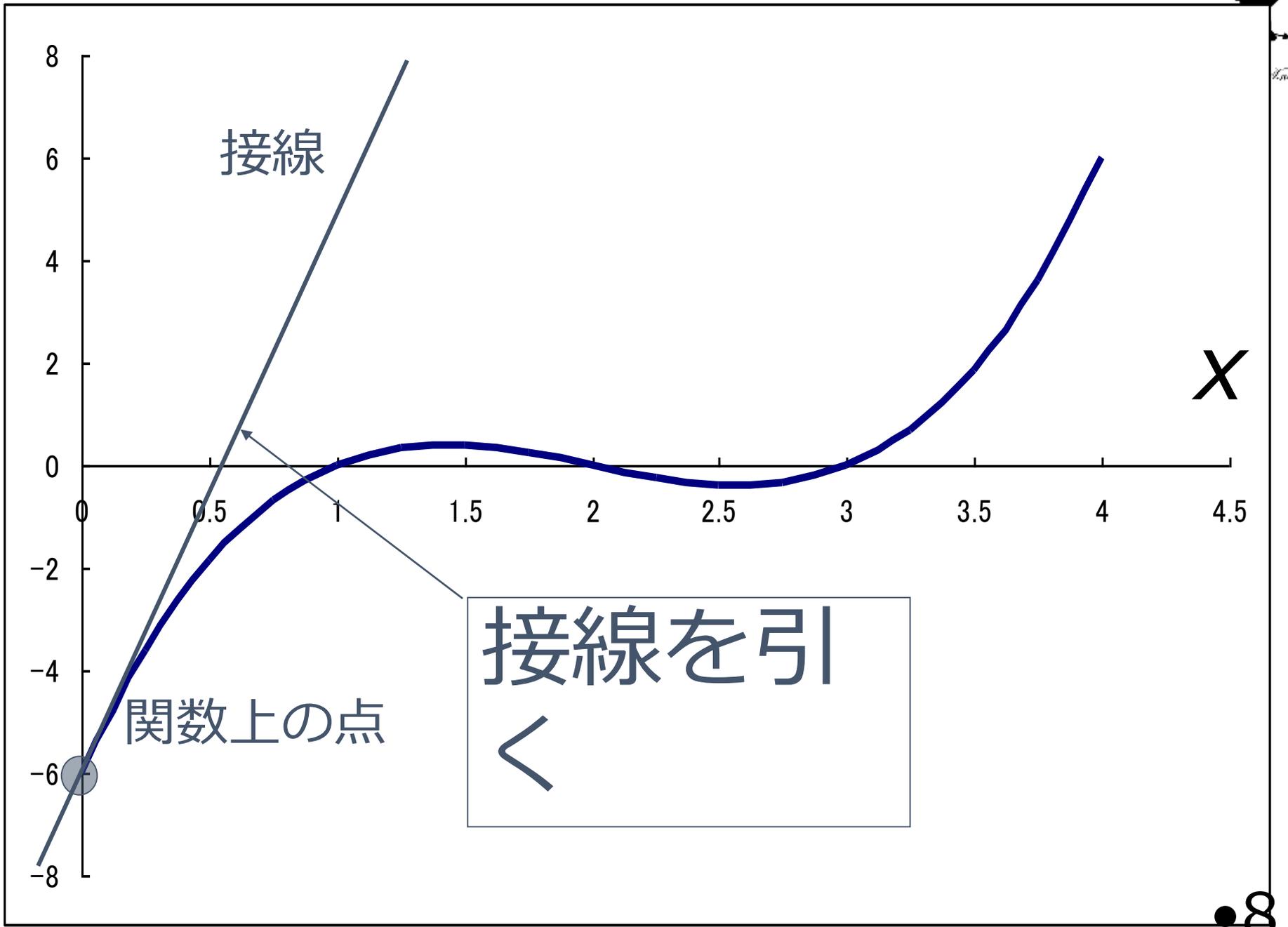
これは, 点  $(x_i, f(x_i))$  における接線と,  $x$  軸 ( $y = 0$ ) との交点  $(x_{i+1}, 0)$  を求めてい

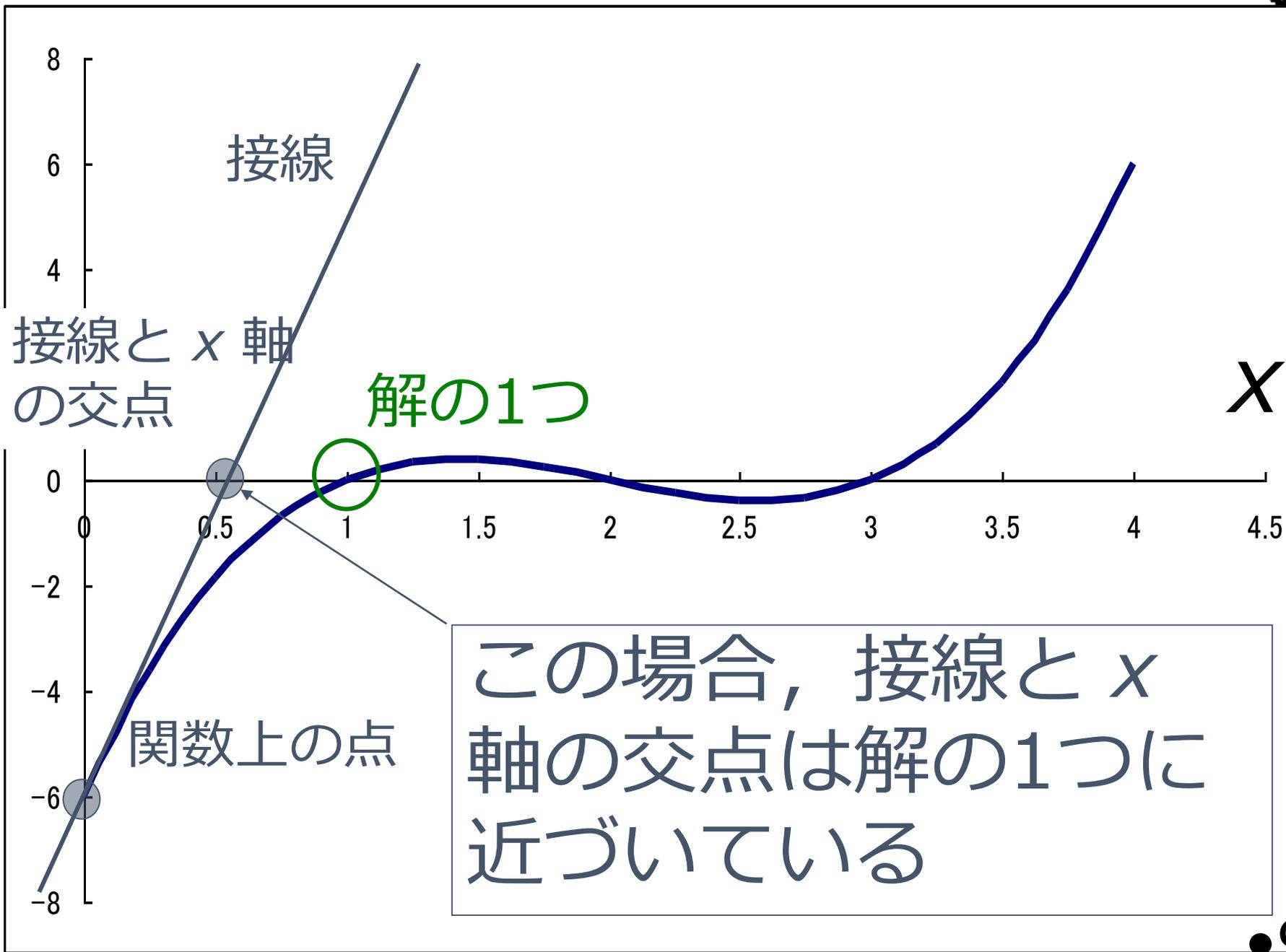
$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

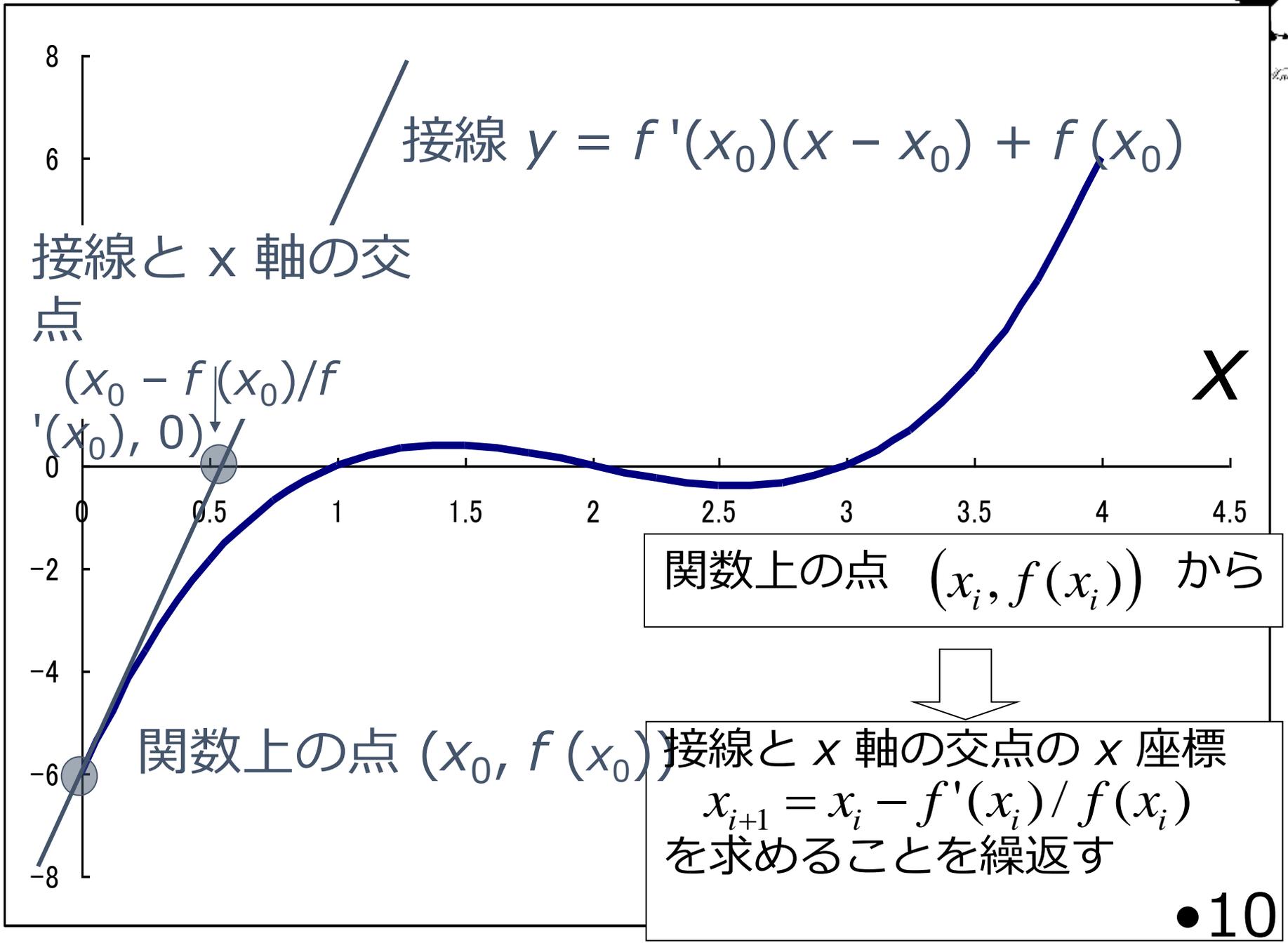


x







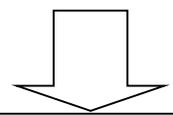


接線  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

接線と x 軸の交点

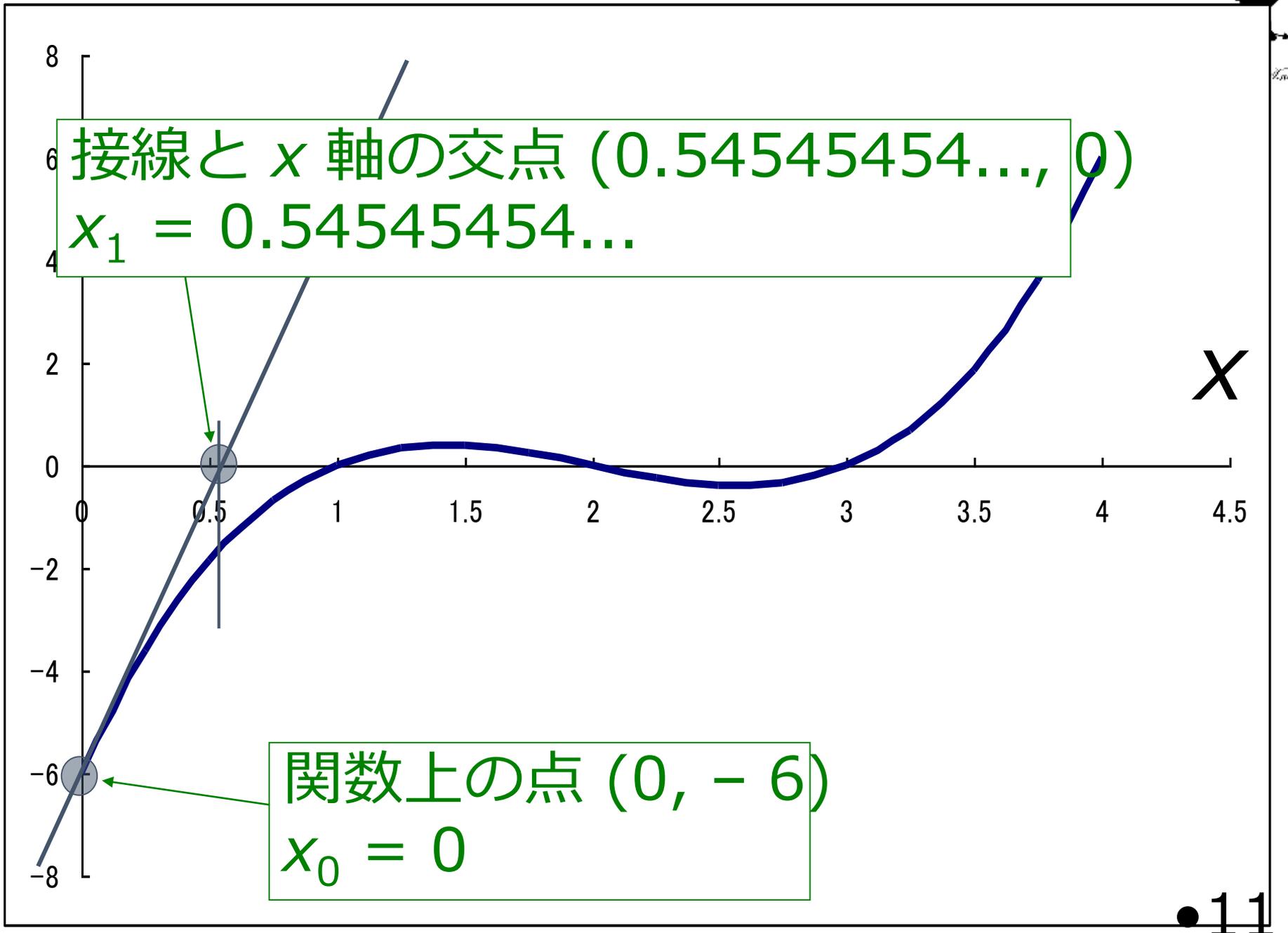
$(x_0 - f'(x_0)/f'(x_0), 0)$

関数上の点  $(x_i, f(x_i))$  から



関数上の点  $(x_0, f(x_0))$  接線と x 軸の交点の x 座標

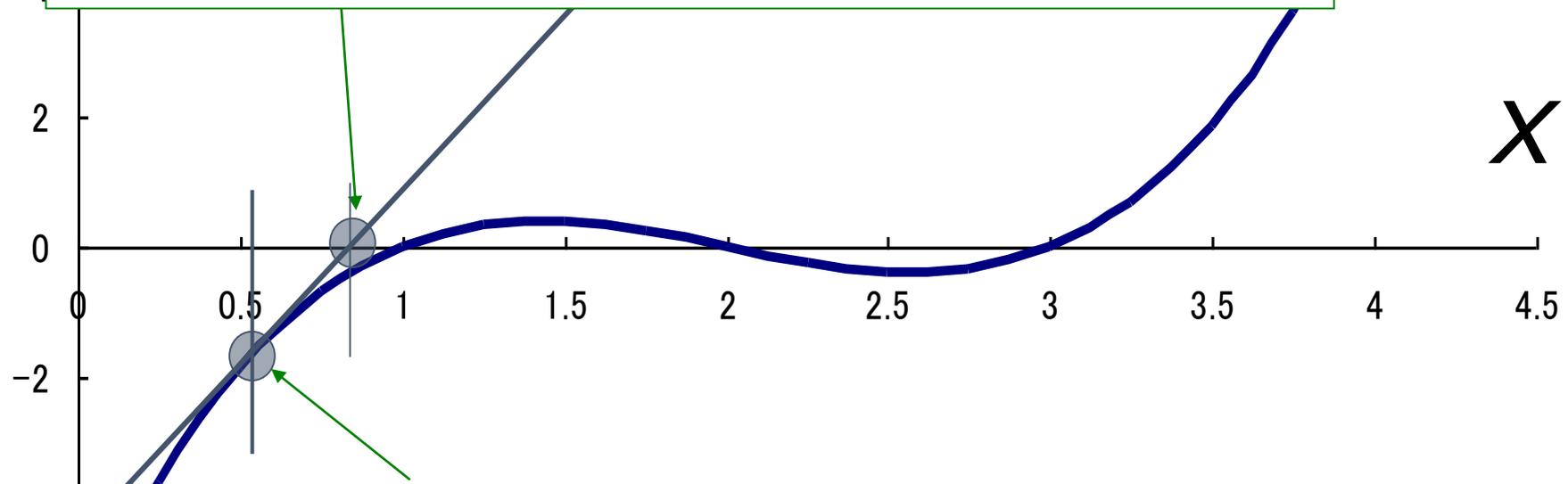
$x_{i+1} = x_i - f'(x_i)/f(x_i)$   
を求めることを繰り返す



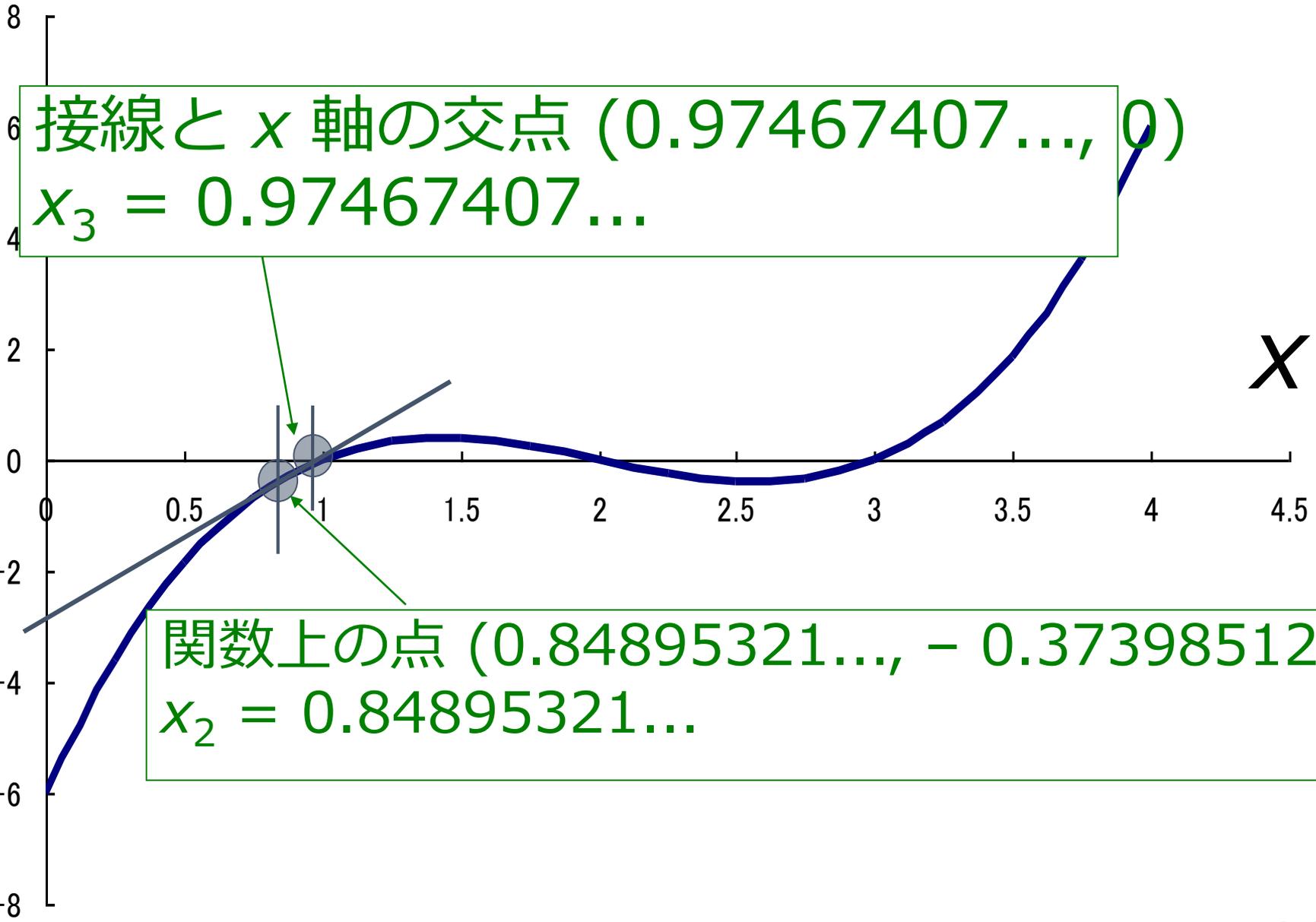
接線と  $x$  軸の交点  $(0.54545454\dots, 0)$   
 $x_1 = 0.54545454\dots$

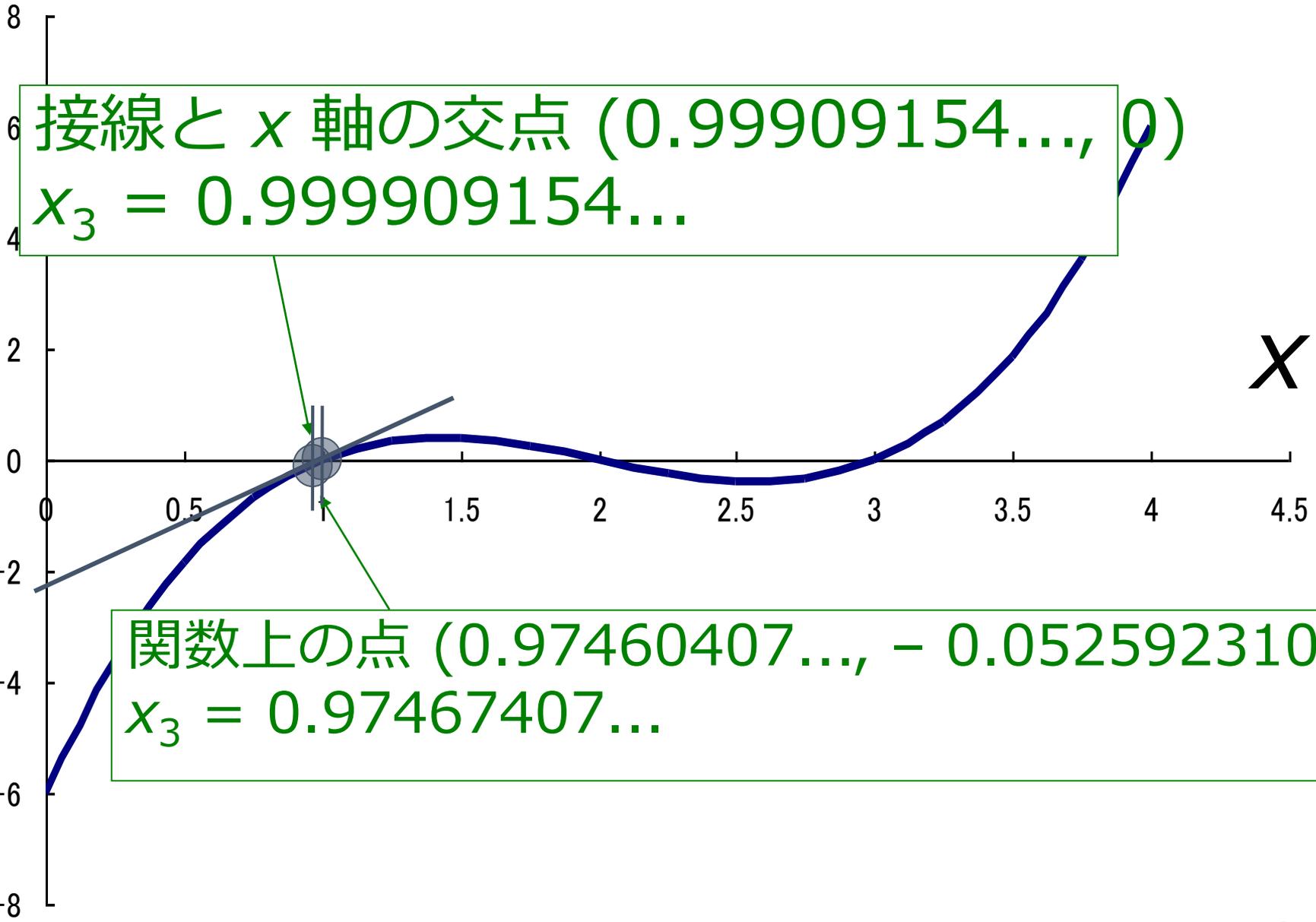
関数上の点  $(0, -6)$   
 $x_0 = 0$

接線と  $x$  軸の交点  $(0.84895321\dots, 0)$   
 $x_2 = 0.84895321\dots$



関数上の点  $(0.54545454\dots, -1.62283996\dots)$   
 $x_1 = 0.54545454\dots$





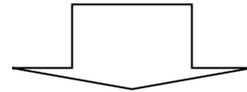
接線と  $x$  軸の交点  $(0.99909154\dots, 0)$   
 $x_3 = 0.999909154\dots$

関数上の点  $(0.97460407\dots, -0.052592310\dots)$   
 $x_3 = 0.97467407\dots$

# ニュートン法での収束の判定



ニュートン法では、現在の  $x_i$  の誤差（どれだけ真の解に近いか）は、正確には分からない  
(解そのものが分かっていないから)

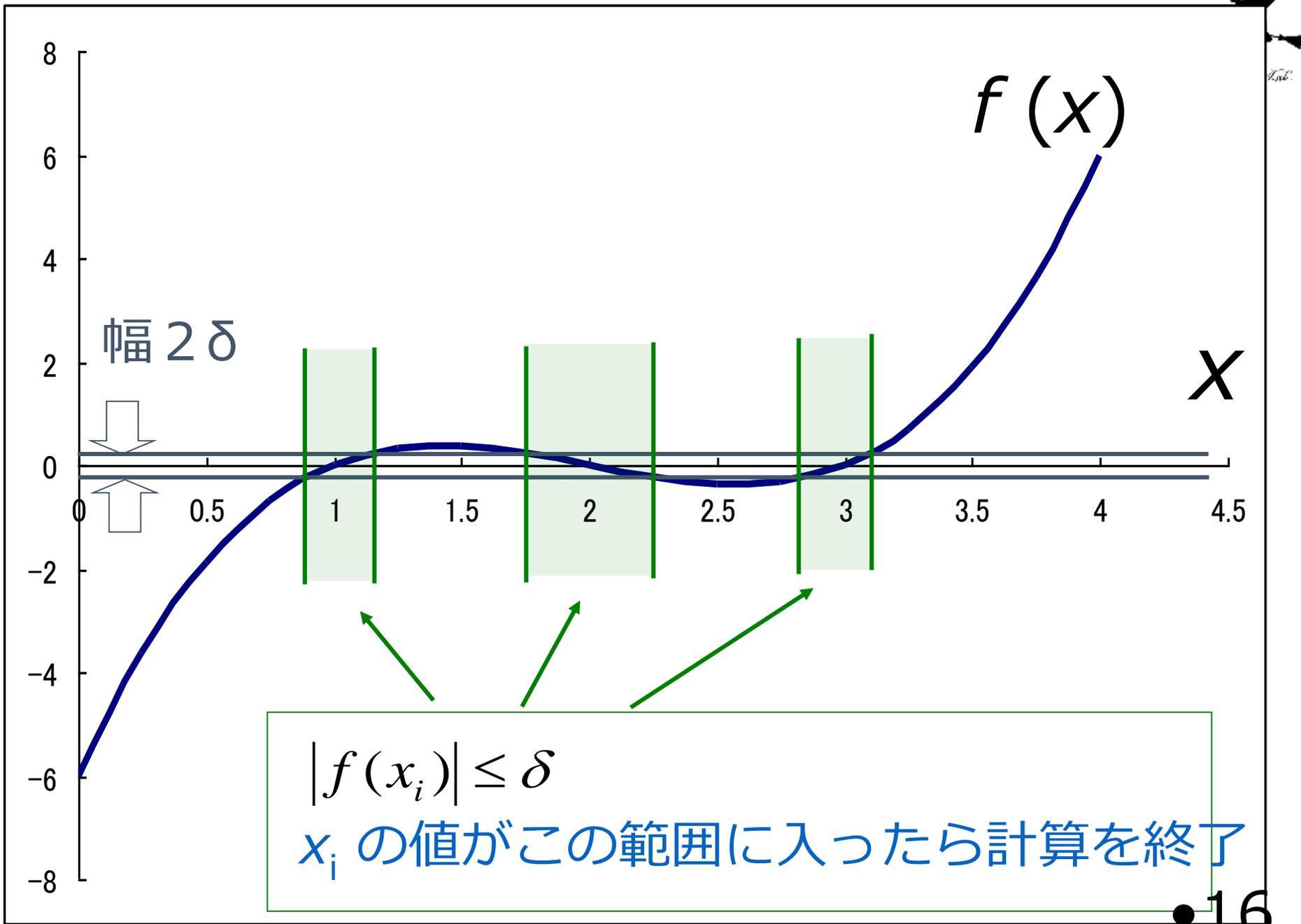


今日の授業では次の方法で行ってみる

ある小さな正の数  $\delta$  に対して

$$|f(x_i)| \leq \delta$$

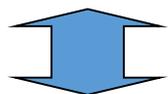
となった時点で計算を終了



# ニュートン法の能力と限界

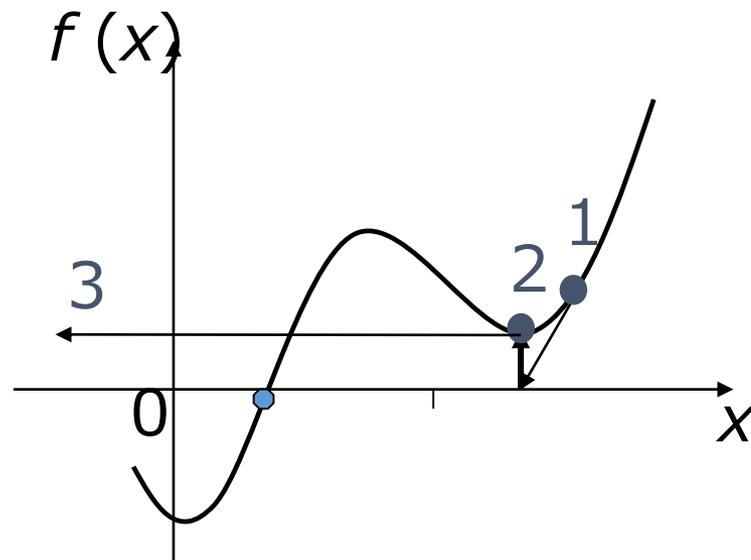


初期近似値  $x_0$  で十分近い解を指定できれば、収束が早い。



初期近似値  $x_0$  の選び方によっては、収束が遅いことがある

収束しないこともありうる  
(右図)



関数  $f(x)$  が単調でなくて変曲点を持つ  
(つまり  $f'(x)$  の符号が変わる) とき  
例) 上の図の1から開始  
2  $(f'(x) = 0)$ となる点)が選ばれる  
3  $y$  軸との交点が求まらない  
(負の無限大に発散)  
→ 収束しない

# ニュートン法の注意点



- 虚数解は求まらない
- $f(x) = 0$  の解が複数あっても, 1 回に求まる解は 1 つだけ
- 初期近似値  $x_0$ 
  - $x_0$  は, コンピュータでなく, 人間が決める
  - $x_0$  の値によっては, 収束しないこともありえる
  - $x_0$  の値によって, 求まる解が変わってくる ( $f(x) = 0$  が複数の解を持つ場合)
- 求まる解は近似解

# 例題 1 . ニュートン法のプログラム



- $f(x) = x^2 - 2$  をニュートン法で解くプログラム



# 実行結果の例



C:\WINDOWS\system32\cmd.exe

繰り返し回数	new_x	f(x)	g(x)
0	5.100000	98.000000	20.000000
1	2.746078	24.010000	10.200000
2	1.737195	5.540947	5.492157
3	1.444238	1.017846	3.474390
4	1.414526	0.085824	2.888476
5	1.414214	0.000883	2.829051

収束した

解は 1.414214

Enter キーを1,2回押してください。プログラムを終了します

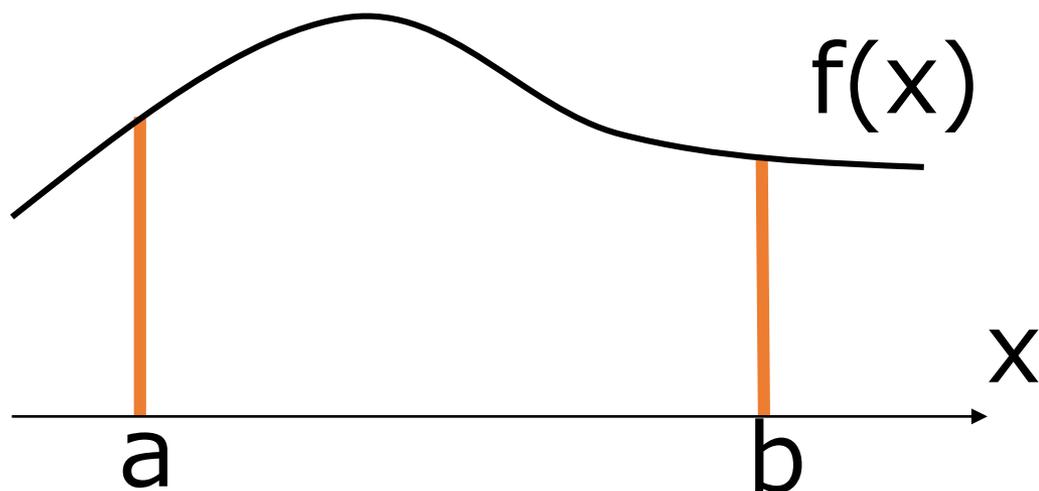


# 台形則による数値積分

# 定積分



- 区間  $[a, b]$  で, 連続関数  $f$ ,  $x$  軸,  $x=a$ ,  $x=b$  で囲まれた面積

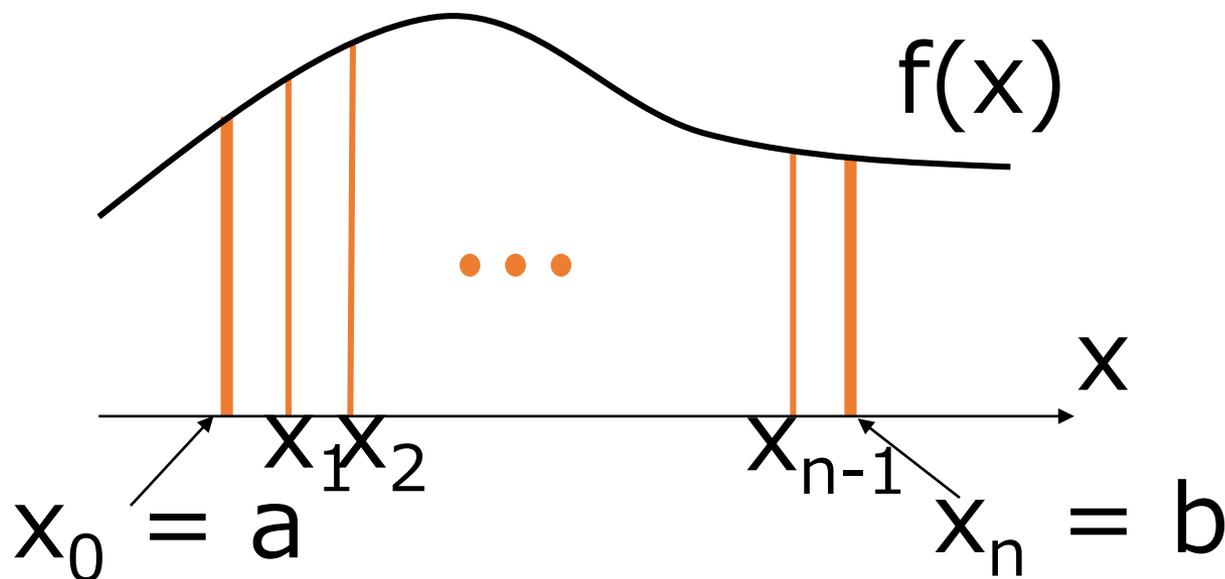


$$\text{定積分} : I = \int_a^b f(x) dx$$

# 区間 $[a, b]$ の小区間への分割



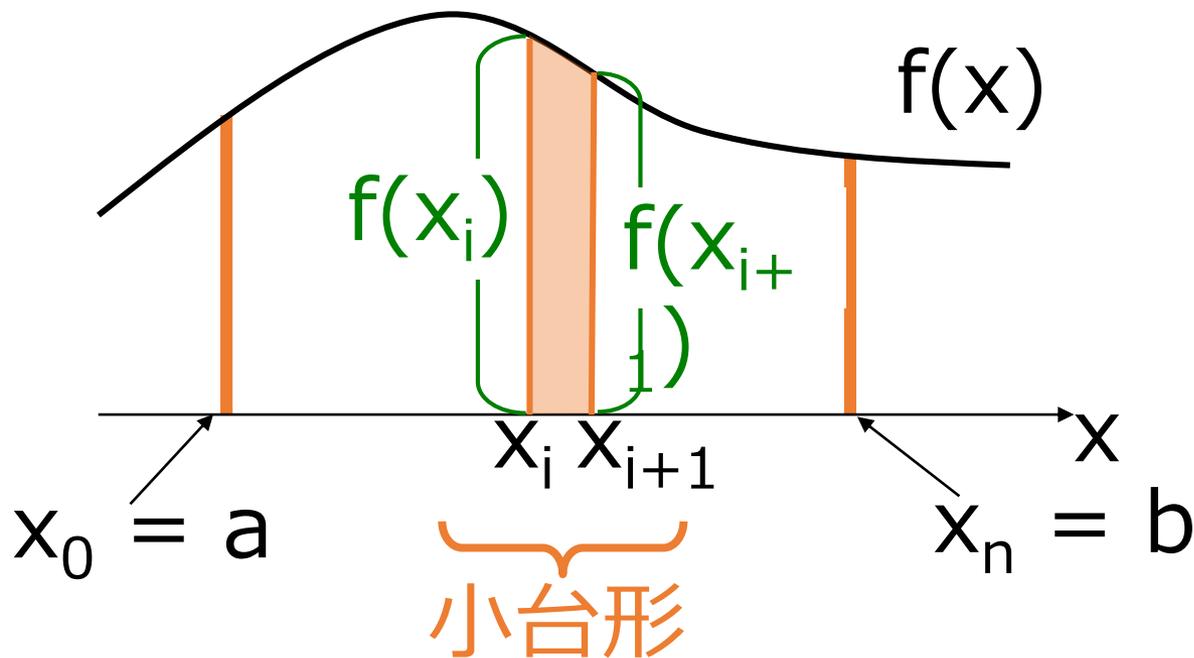
- $n$  個の等間隔な小区間へ分割
  - 幅:  $h = (b-a) / n$
  - 小区間:  $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$   
但し,  $x_0 = a, x_i = x_0 + i \times h$



# 小台形



- 小台形の面積は

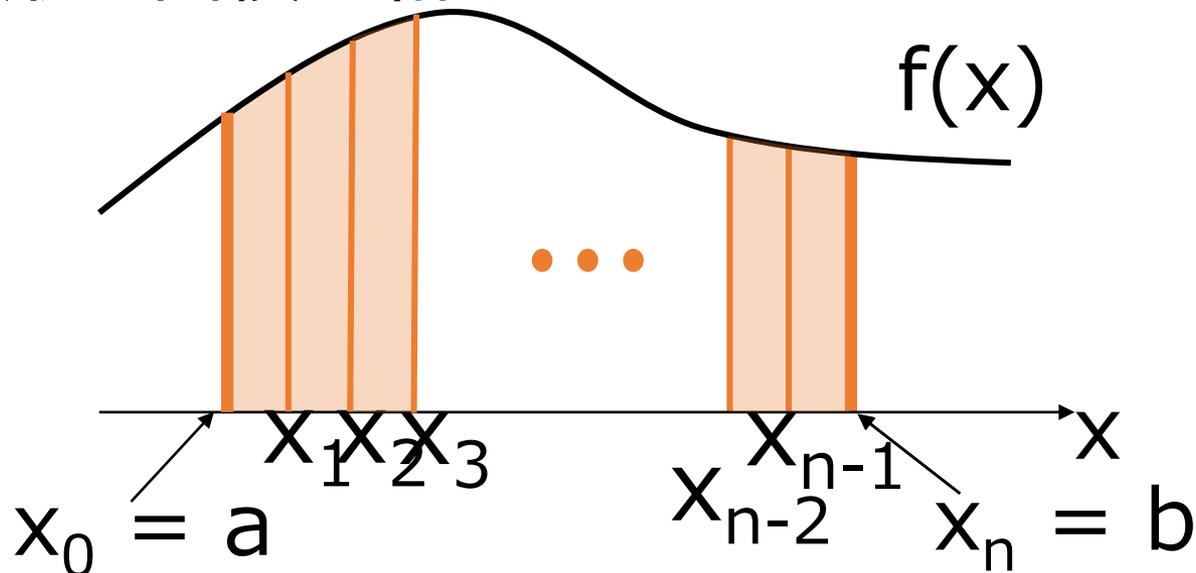


$$\frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

# 台形則 trapezoidal rule



- 小台形の面積の和は



- 定積分  $I$  を, この和  $S_n$  で近似  $\Rightarrow$  台形則という

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

# 台形則



- 両端  $x_0 = a$  と  $x_n = b$  を除いて,  $f(x_i)$  は2度出現

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1})) \\ &= \frac{h}{2} (f(x_0) + \underbrace{2(f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}))}_{\text{2回現れる部分}} + f(x_n)) \\ &= h \cdot \left( \frac{1}{2} f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{2} f(x_n) \right) \\ &= h \cdot \left( \frac{1}{2} f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(a + ih) + \frac{1}{2} f(b) \right) \end{aligned}$$

但し  $h = (b - a) / n$  • 27

# 台形則による数値積分



- 区間  $[a, b]$  を  $n$  等分 (1区間の幅  $h=(b-a)/n$ )
- $n$  個の台形を考え, その面積の和  $S_n$  で, 定積分  $I$  を近似
  - $f(x)$  が連続関数のときは,  $n$  を無限大に近づければ,  $S_n$  は  $I$  に近づく

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1})) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

- 但し, 単純に「 $n$  を大きくすればよい」とは言えない
  - $n$  を大きくすると  $\Rightarrow$  計算時間の問題, 丸め誤差の問題が発生