sp-14. ニュートン法

（Scheme プログラミング）

URL: https://www.kkaneko.jp/pro/scheme/index.html

金子邦彦

アウトライン

14-1 ニュートン法

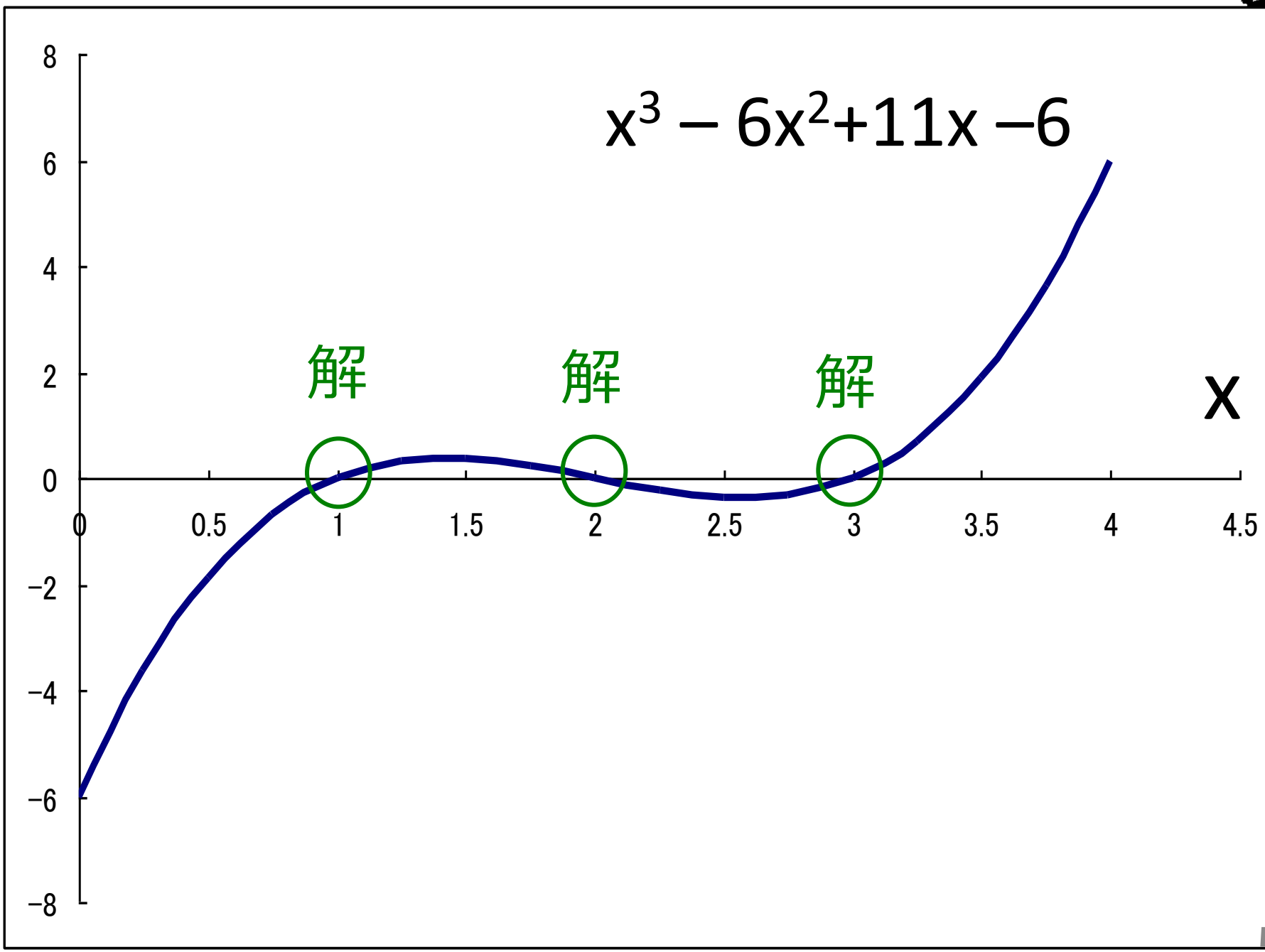
14-2 パソコン演習

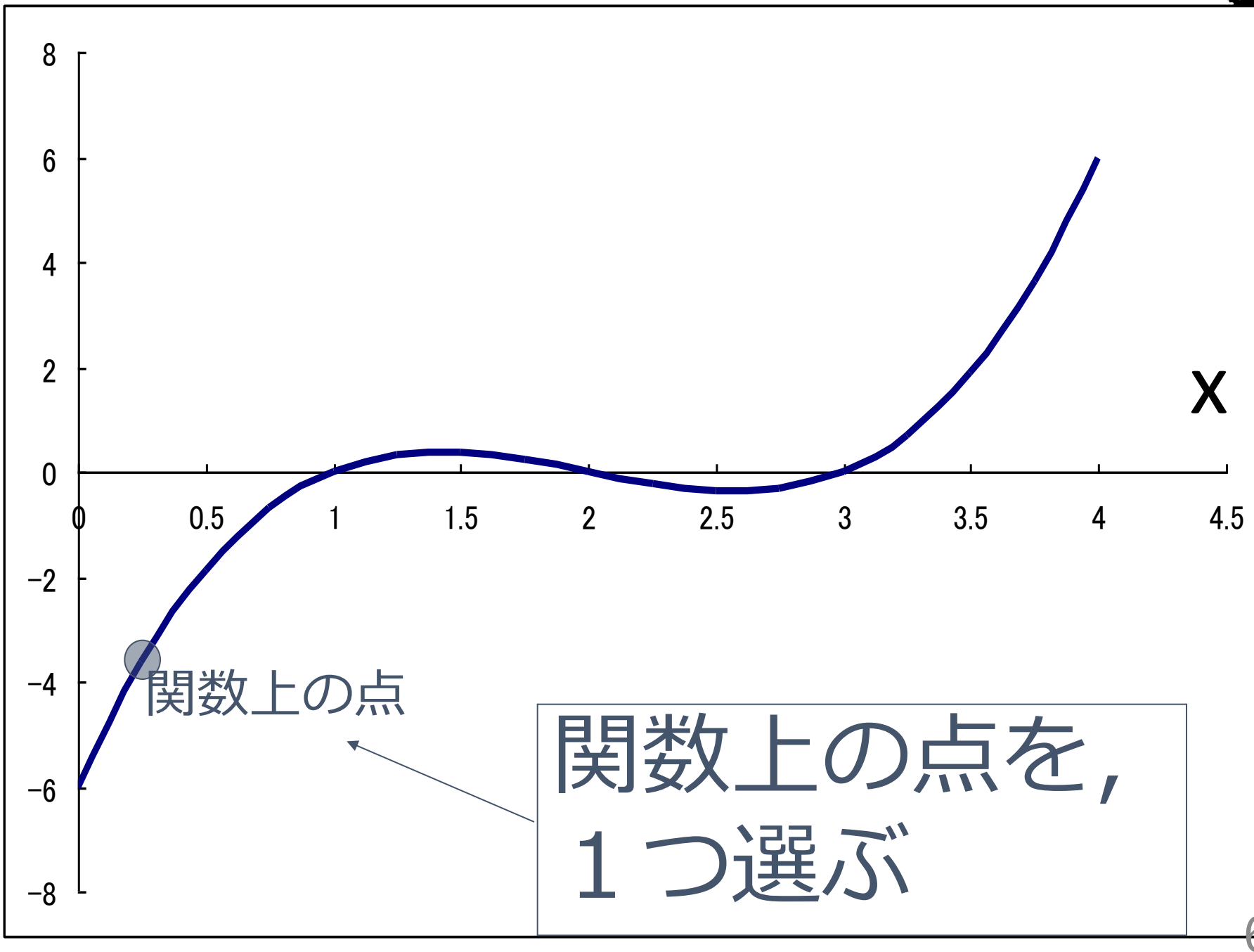
14-3 課題

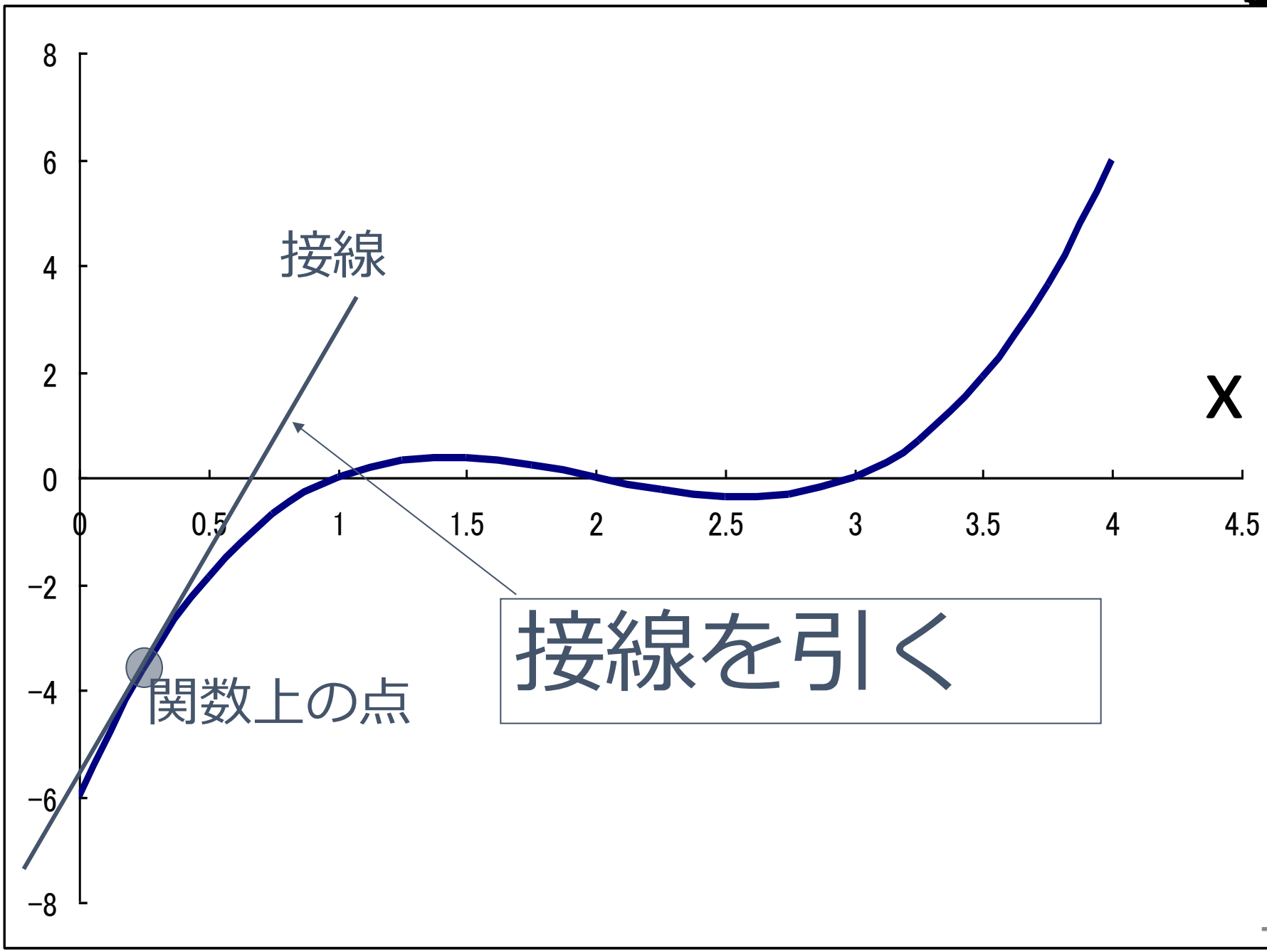
14-1 ニュートン法

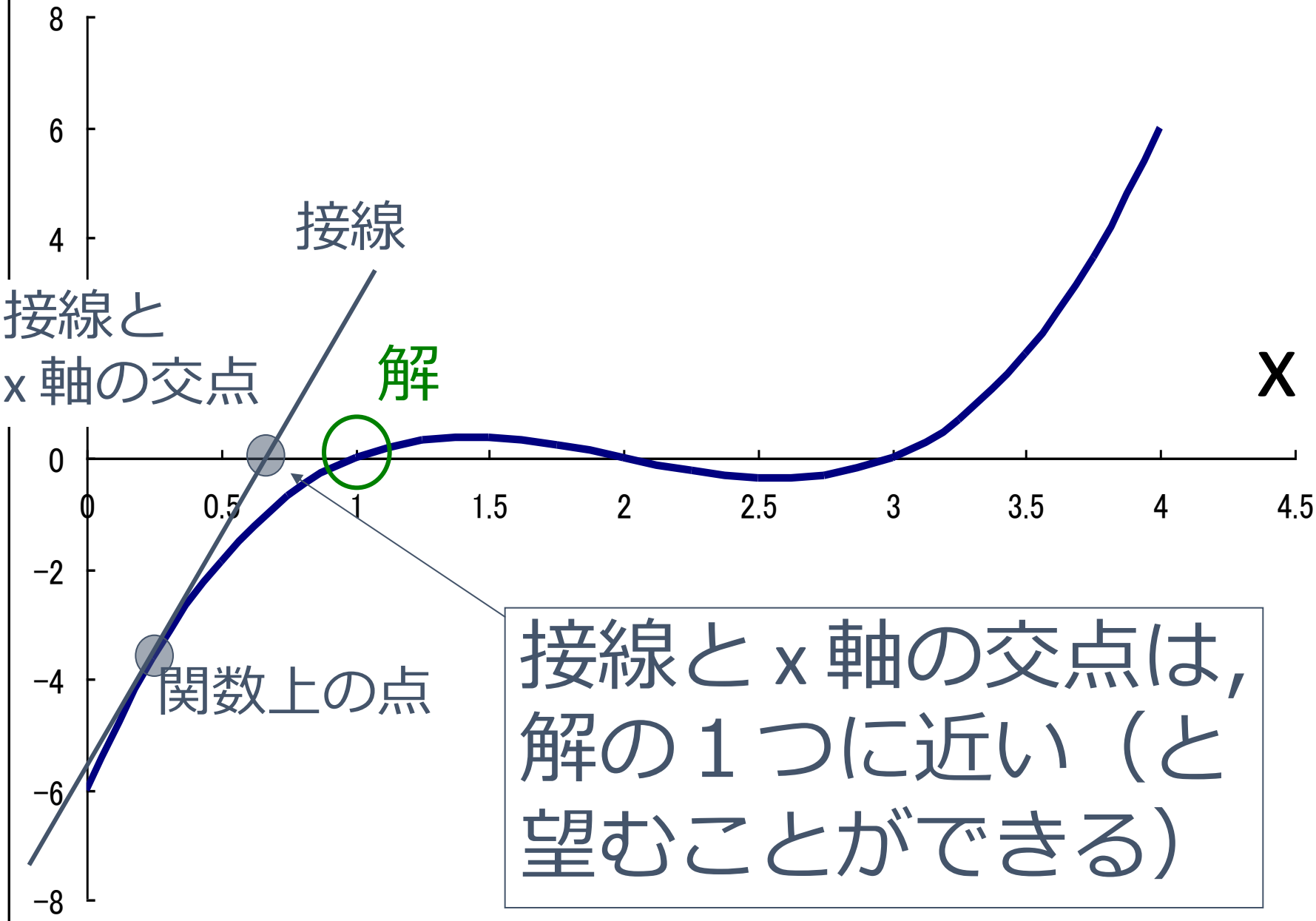
本日の内容

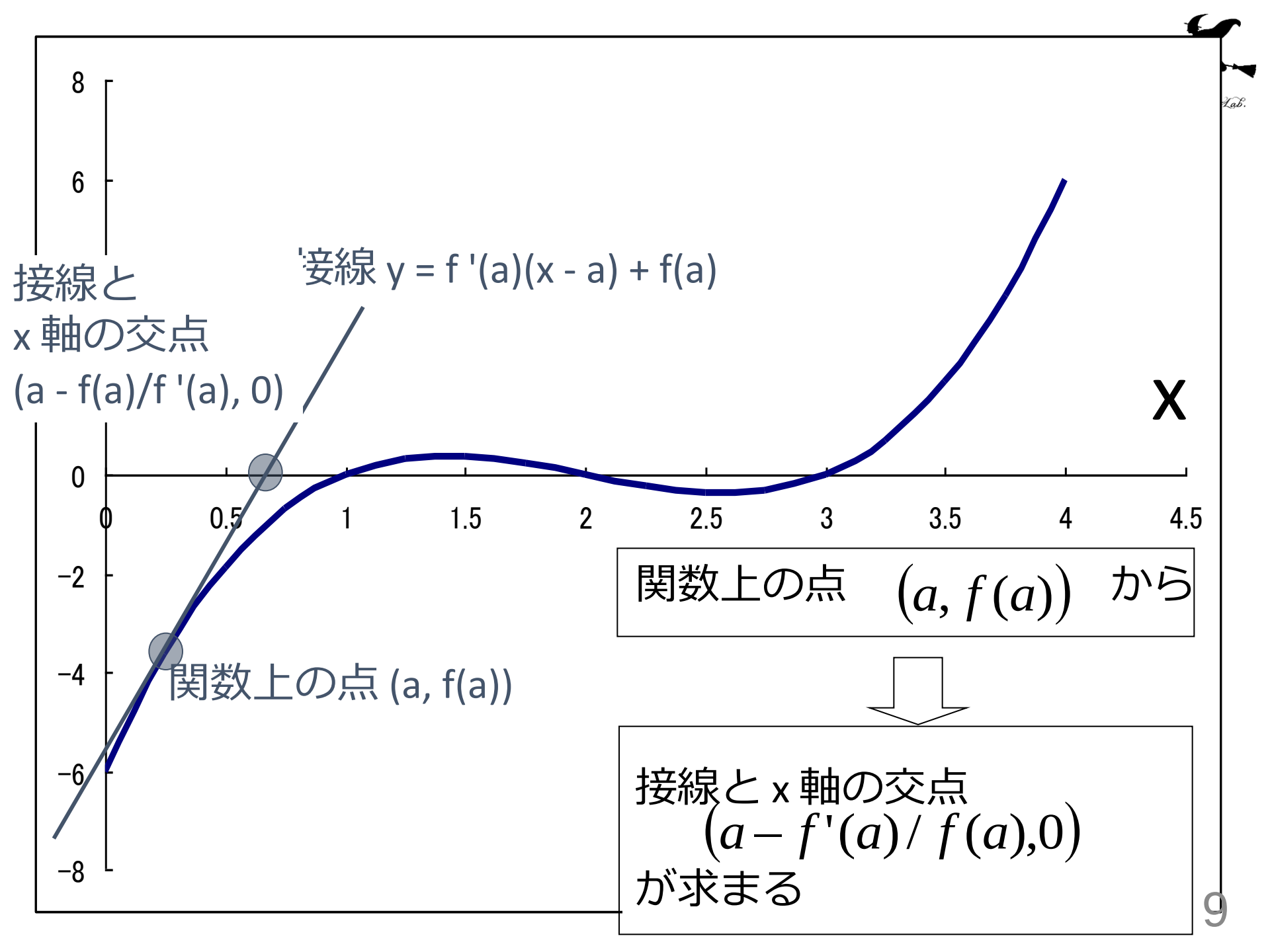
- ニュートン法による非線形方程式の求解
  - $x_0, x_1, x_2 \ldots$　の収束の様子を観察し，ニュートン法の理解を深める
  - ニュートン法で，解が求まらない場合がありえることを理解する


$x^3 - 6x^2+11x -6$
解
解
解
x
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
X
関数上の点
関数上の点を，
１つ選ぶ


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
X
接線
関数上の点
接線を引く


8
6
4
0
−2
−4
−6
−8
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
X
接線
接線と
x 軸の交点
解
関数上の点
接線と x 軸の交点は，
解の１つに近い（と
望むことができる）


8
6
−2
−4
−6
−8
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
X
接線と
x 軸の交点
(a - f(a)/f '(a), 0)
接線 y = f '(a)(x - a) + f(a)
関数上の点 (a, f(a))
関数上の点 $(a, f(a))$ から
接線と x 軸の交点
$(a - f'(a)/f(a), 0)$
が求まる

ニュートン法

- 初期近似値 x_0 から出発
- 反復公式

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

を繰り返す

- $x_1, x_2, x_3 \ldots$ は，だんだんと解に近づいていく（と望むことができる）

ニュートン法

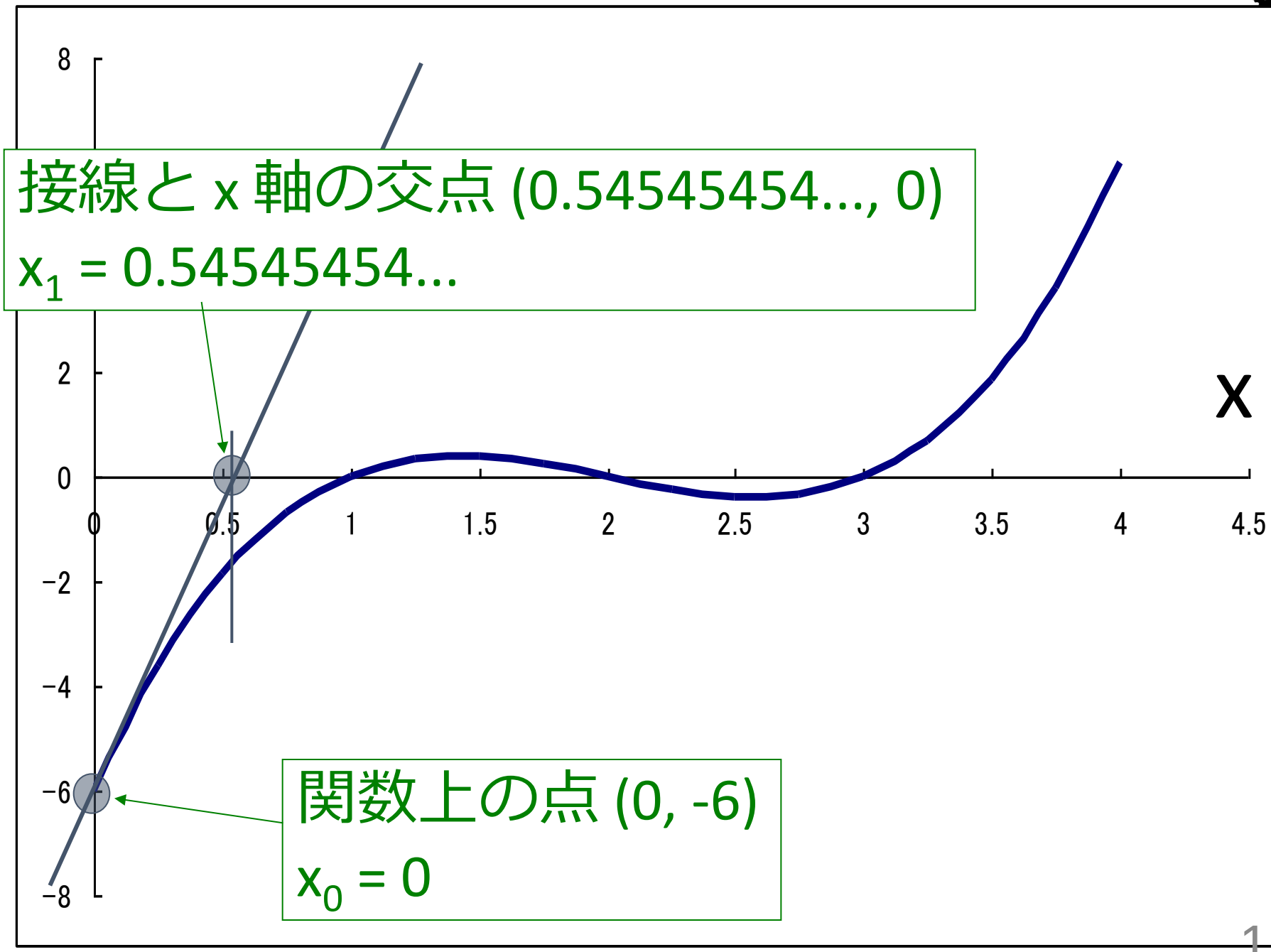
- 初期近似値 x_0 から出発
- 反復公式

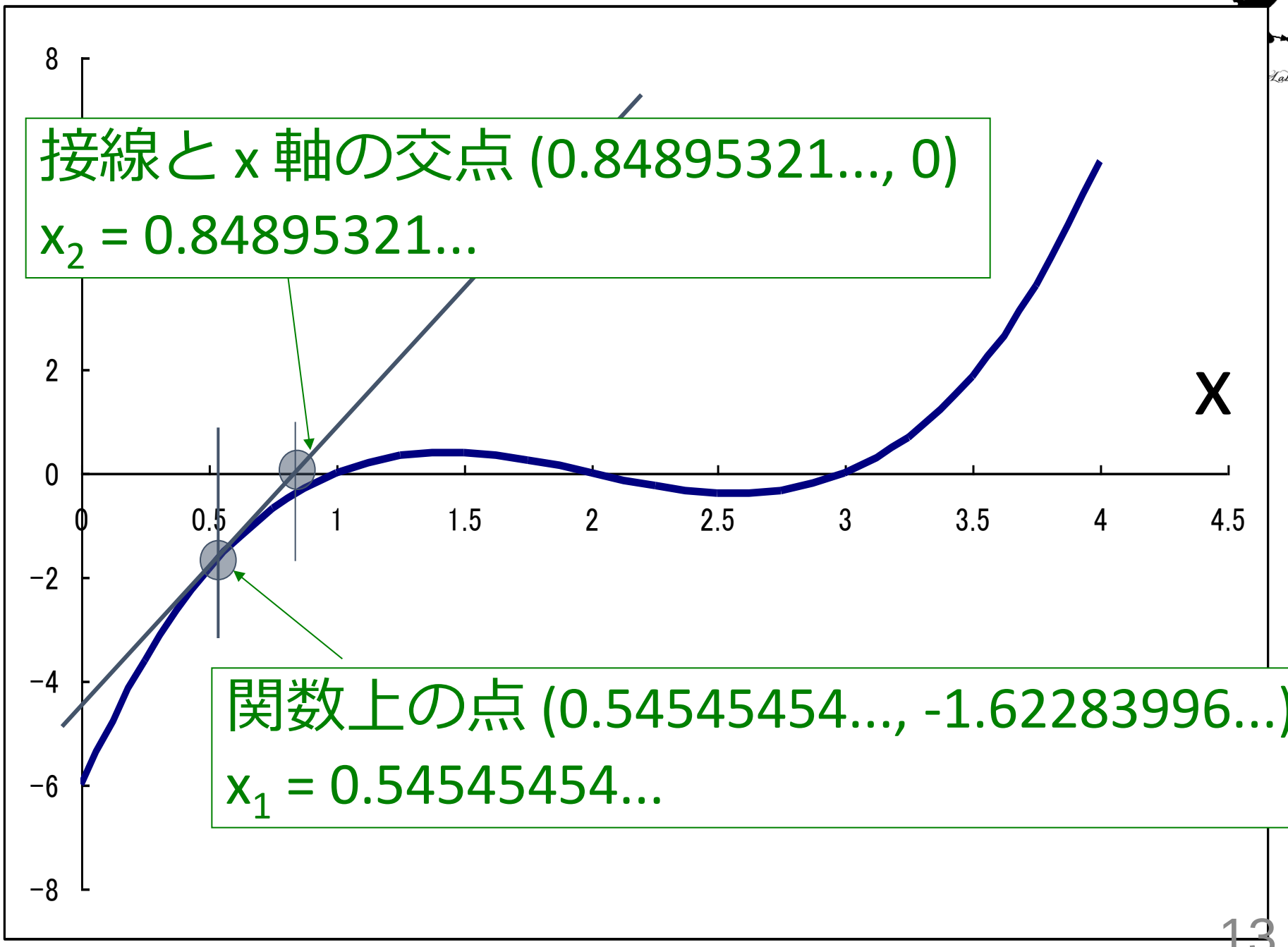
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

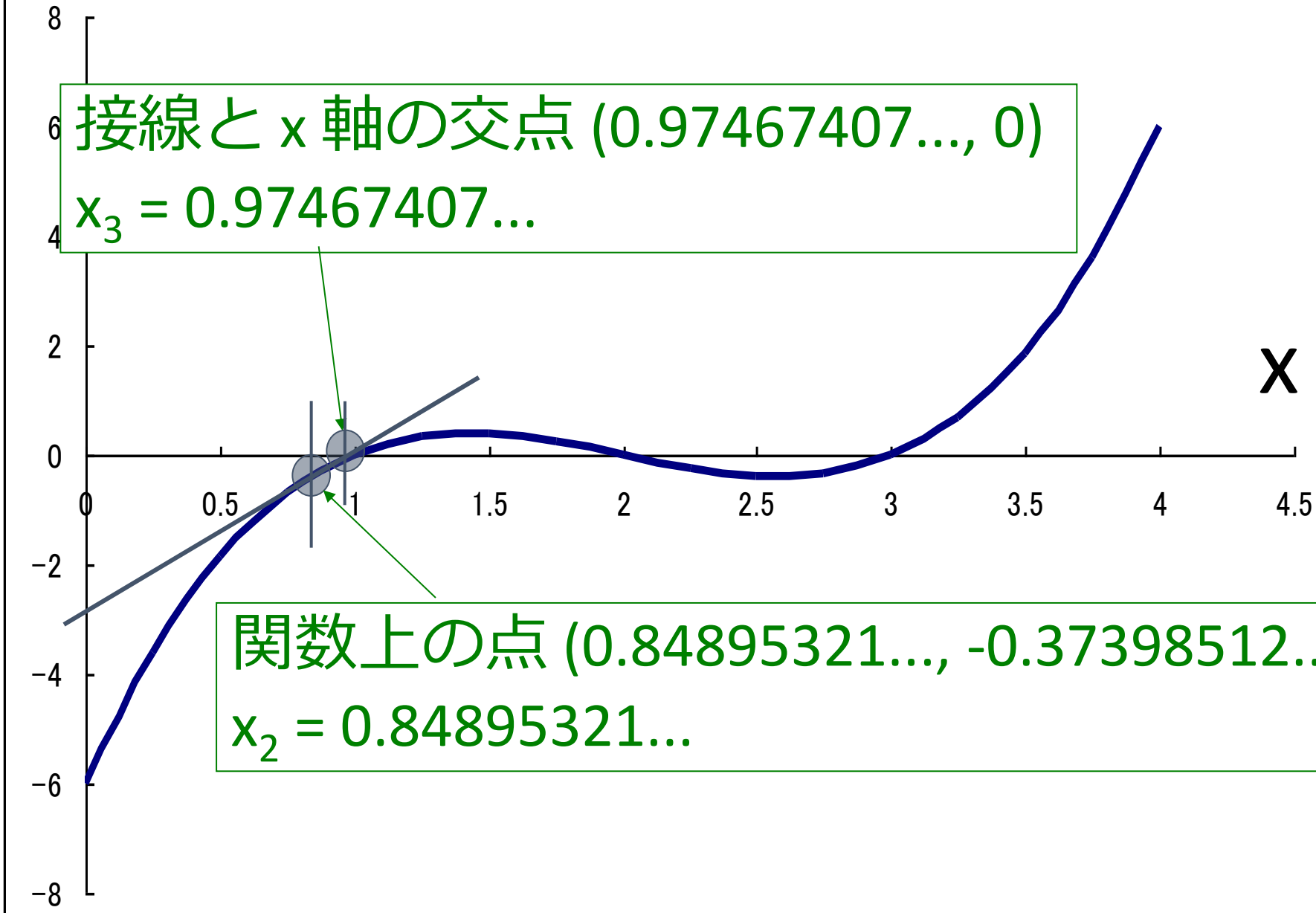
を繰り返す

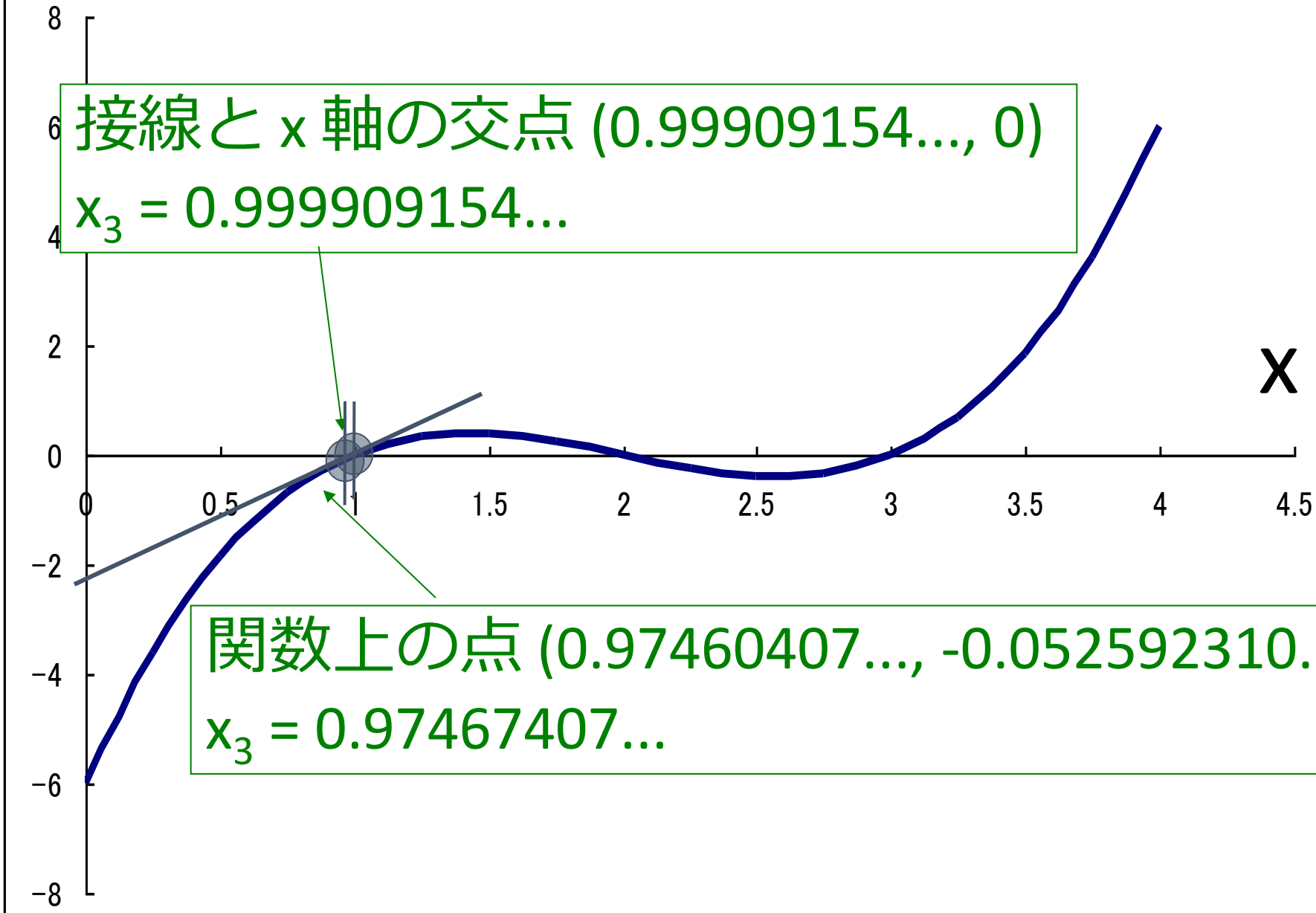
- x_1, x_2, x_3 ... は，だんだんと解に近づいていく

これは，点（x_i, $f(x_i)$）における接線と，
x軸 (y=0) との交点 (x_{i+1}, 0) を求めている


接線と x 軸の交点 (0.54545454..., 0)
x_1 = 0.54545454...
関数上の点 (0, -6)
x_0 = 0
x
8
2
0
−2
−4
−6
−8
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5


接線と x 軸の交点 (0.84895321..., 0)
x_2 = 0.84895321...
関数上の点 (0.54545454..., -1.62283996...)
x_1 = 0.54545454...
x
8
2
0
−2
−4
−6
−8
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5


接線と x 軸の交点 (0.97467407..., 0)
x_3 = 0.97467407...
関数上の点 (0.84895321..., -0.37398512...)
x_2 = 0.84895321...
x
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5


接線と x 軸の交点 (0.99909154..., 0)
x_3 = 0.999909154...
関数上の点 (0.97460407..., -0.052592310...)
x_3 = 0.97467407...
X
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5

ニュートン法の例

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, $x_0 = 0$ では：

$x_0 = 0$

$f(x_0) = -6, \quad f'(x_0) = 11$

$\Rightarrow x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) = 0.54545454...$

$x_1 = 0.54545454...$

$f(x_1) = -1.62283996..., \quad f'(x_1) = 5.3471074...$

$\Rightarrow x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1) = 0.84895321...$

$x_2 = 0.84895321...$

$f(x_2) = 0.37398512..., \quad f'(x_2) = 2.9747261...$

$\Rightarrow x_3 = x_2 - f(x_2)/f'(x_2) = 0.97460407...$

どうやって計算を終了するか

「反復公式」を繰り返すのだが
　⇒　いつ止めたらいいのか？

- 決定打は無いのだが，今日の授業では次のやり方で行ってみる

ある小さな正の数δに対して

$$\left| f(x_n) \right| < \delta$$

となった時点で計算を終了し x_n を解とする

Scheme での多項式の書き方

- 「+」では，足したいものを３つ以上並べてもよい

例）　$2x^2 - 3x - 1$

```
(+ (* 2 x x)
   (* -3 x)
   -1))
```

14-2 パソコン演習

パソコン演習の進め方

- 資料を見ながら，「例題」を行ってみる
- 各自，「課題」に挑戦する
- 自分のペースで先に進んで構いません

DrScheme の使用

- DrScheme の起動
  プログラム　→ PLT Scheme → DrScheme
- 今日の演習では「Intermediate Student」に設定
  Language
  → Choose Language
  → Intermediate Student
  → Execute ボタン

例題１．ニュートン法による非線形方程式の解

- 非線型方程式 f(x) = 0 をニュートン法で解く関数 newton を作り，実行する
  - 方程式:　f
  - 初期近似値：x_0

「例題１．ニュートン法による非線形方程式の解」の手順 (1/2)

1. 次を「定義用ウインドウ」で，実行しなさい
   - 入力した後に，Execute ボタンを押す

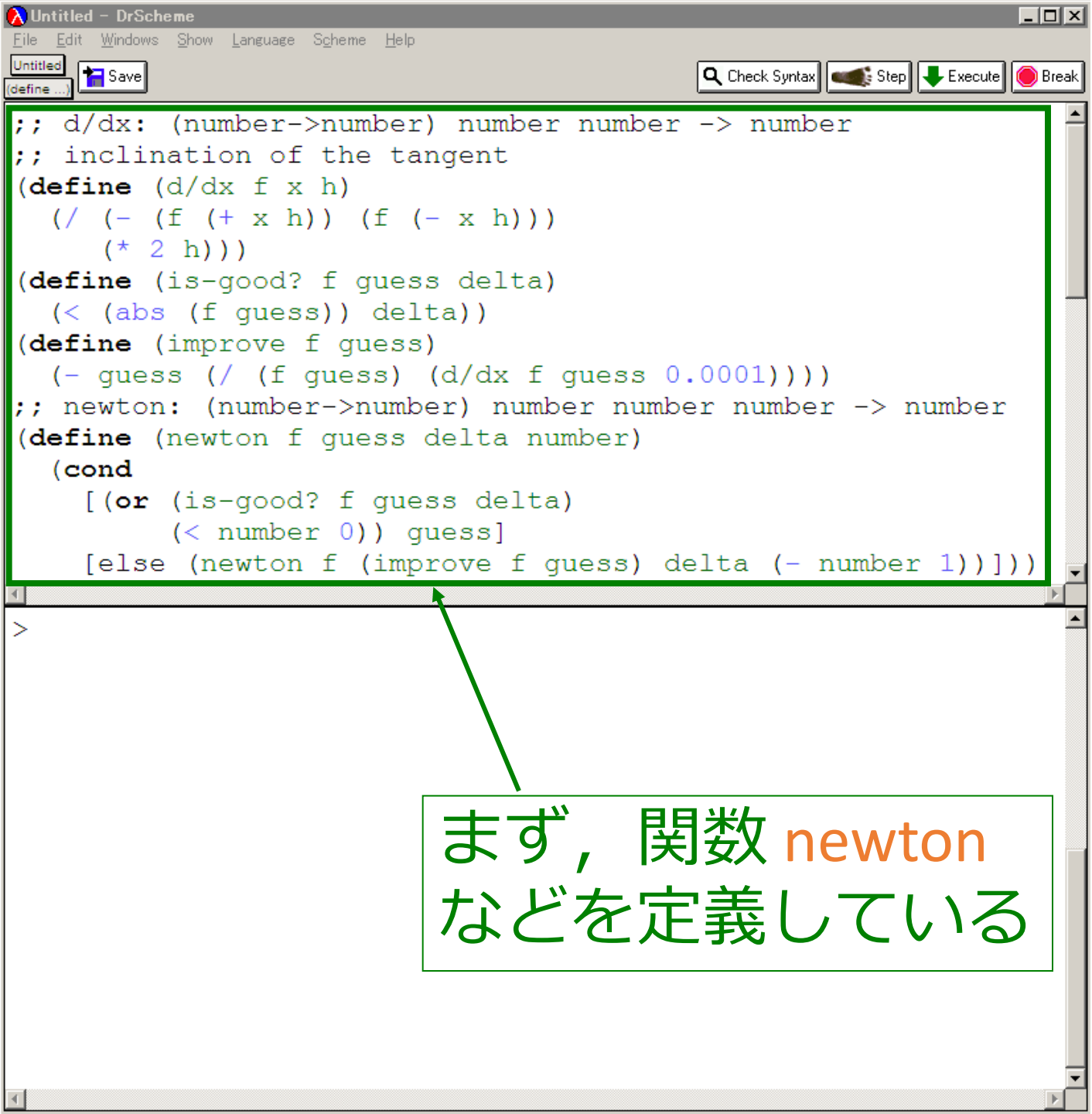
```
;; d/dx: (number->number) number number -> number
;; inclination of the tangent
(define (d/dx f x h)
   (/ (- (f (+ x h)) (f (- x h)))
      (* 2 h)))
(define (is-good? f guess delta)
   (< (abs (f guess)) delta))
(define (improve f guess)
   (- guess (/ (f guess) (d/dx f guess 0.0001))))
;; newton: (number->number) number number number ->
number
(define (newton f guess delta number)
   (cond
      [(or (is-good? f guess delta)
           (< number 0)) guess]
      [else (newton f (improve f guess) delta (- number 1))]))
(define (f2 x)
  (+ (* x x x) (* -6 x x) (* 11 x) -6))
```

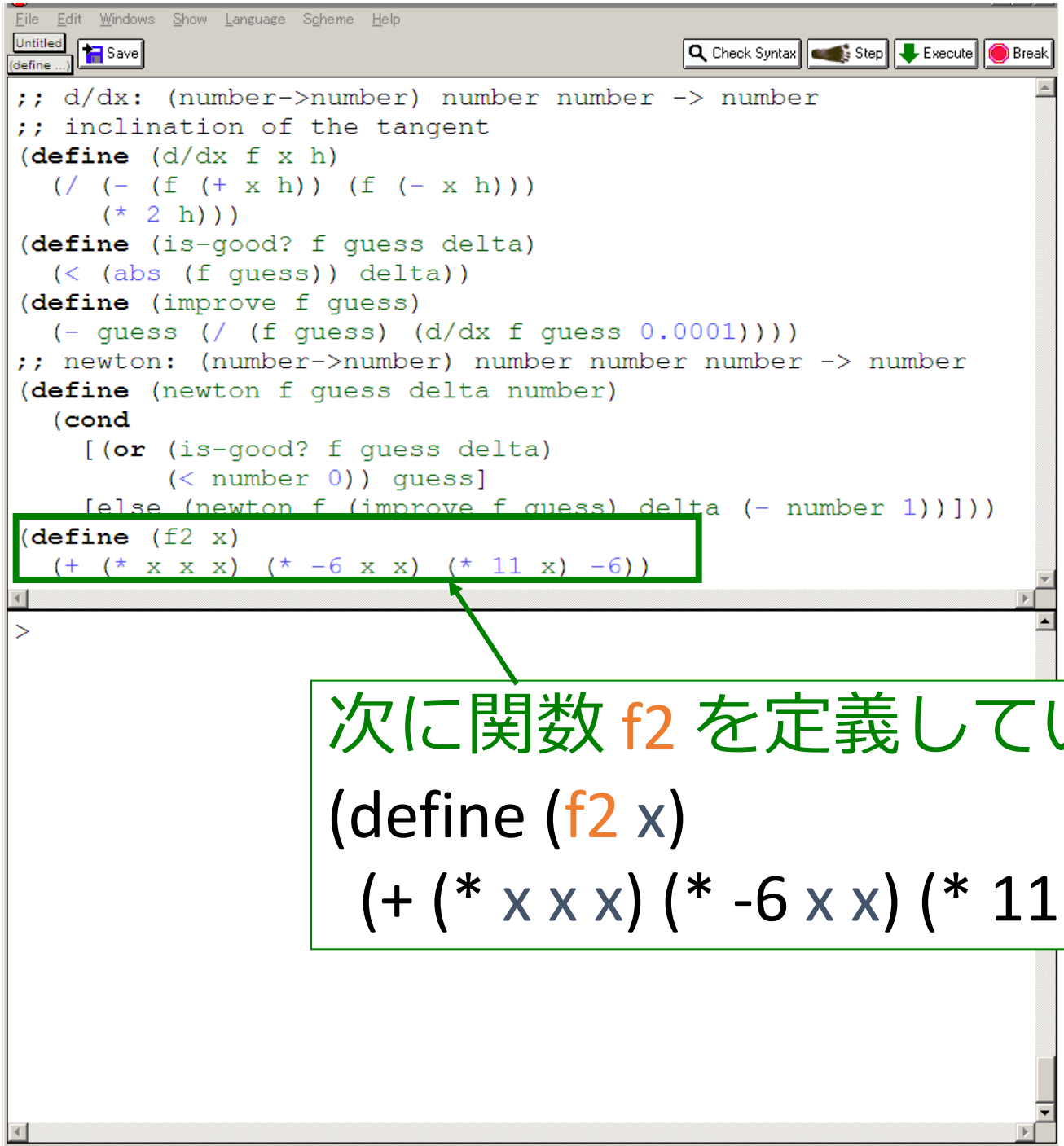
「例題１．ニュートン法による非線形方程式の解」の手順 (2/2)

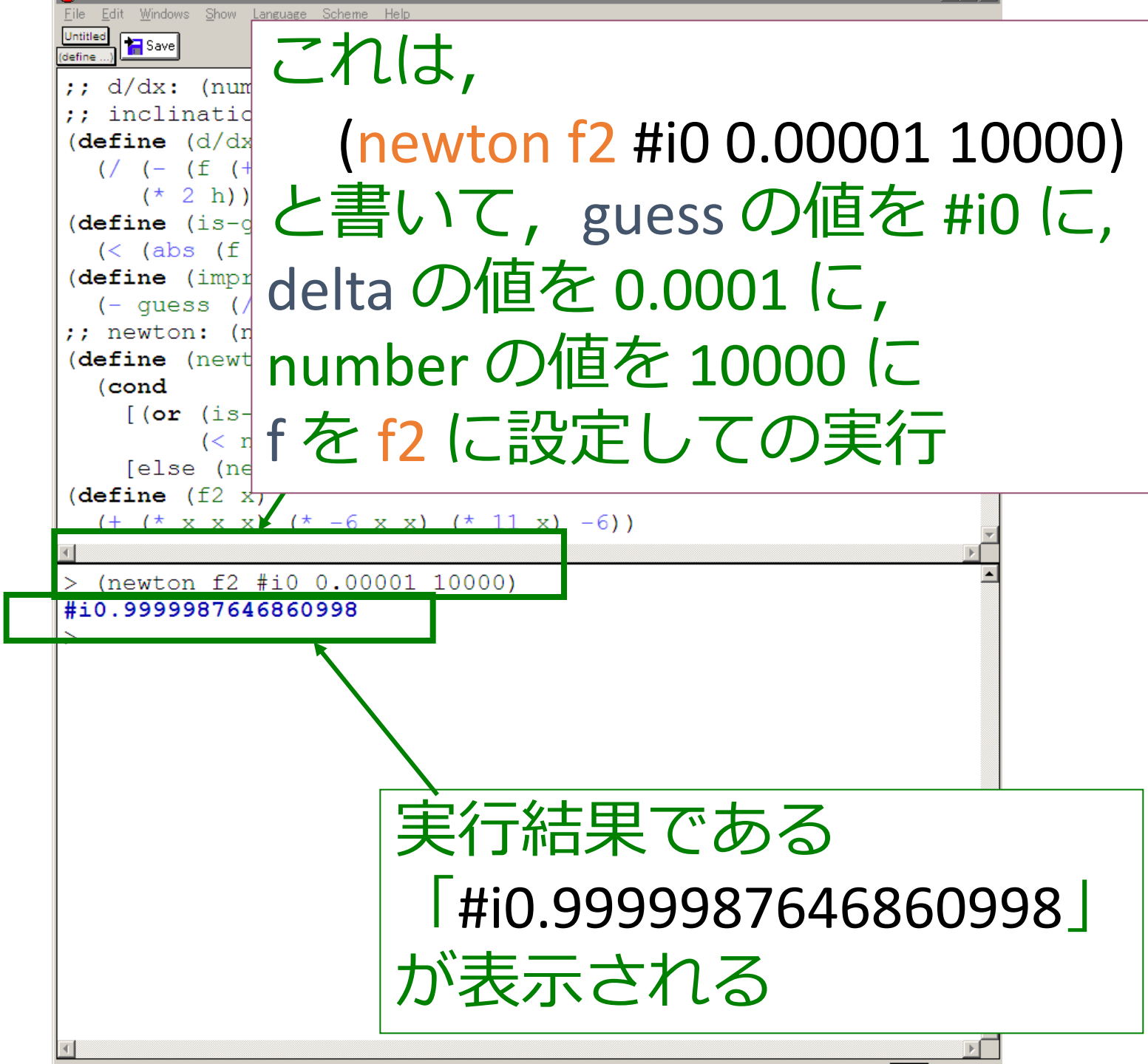
2. その後，次を「実行用ウインドウ」で実行しなさい

```
(newton f2 #i0 0.00001 10000)
```

☆　次は，課題に進んでください


Untitled - DrScheme
File Edit Windows Show Language Scheme Help
Untitled
(define ...)
Save
Check Syntax
Step
Execute
Break
;; d/dx: (number->number) number number -> number
;; inclination of the tangent
(define (d/dx f x h)
(/ (- (f (+ x h)) (f (- x h)))
(* 2 h)))
(define (is-good? f guess delta)
(< (abs (f guess)) delta))
(define (improve f guess)
(- guess (/ (f guess) (d/dx f guess 0.0001))))
;; newton: (number->number) number number number -> number
(define (newton f guess delta number)
(cond
[(or (is-good? f guess delta)
(< number 0)) guess]
[else (newton f (improve f guess) delta (- number 1))]))
>
まず，関数 newton
などを定義している


File Edit Windows Show Language Scheme Help
Untitled
define ...
Save
Check Syntax
Step
Execute
Break
;; d/dx: (number->number) number number -> number
;; inclination of the tangent
(define (d/dx f x h)
(/ (- (f (+ x h)) (f (- x h)))
(* 2 h)))
(define (is-good? f guess delta)
(< (abs (f guess)) delta))
(define (improve f guess)
(- guess (/ (f guess) (d/dx f guess 0.0001))))
;; newton: (number->number) number number number -> number
(define (newton f guess delta number)
(cond
[(or (is-good? f guess delta)
(< number 0)) guess]
[else (newton f (improve f guess) delta (- number 1))]))
(define (f2 x)
(+ (* x x x) (* -6 x x) (* 11 x) -6))
>
次に関数 f2 を定義している
(define (f2 x)
(+ (* x x x) (* -6 x x) (* 11 x) -6))


これは,
(newton f2 #i0 0.00001 10000)
と書いて，guess の値を #i0 に,
delta の値を 0.0001 に,
number の値を 10000 に
f を f2 に設定しての実行
> (newton f2 #i0 0.00001 10000)
#i0.9999987646860998
実行結果である
「#i0.9999987646860998」
が表示される

newton の入力と出力

f2
#i1
0.00001
10000

f2 = 0 の近似解の１つ

入力は１つの関数と，
３つの数値

出力は数値

newton は，関数を入力とするような関数
（つまり高階関数）

```
;; d/dx: (number->number) number number -> number
;; inclination of the tangent
(define (d/dx f x h)
    (/ (- (f (+ x h)) (f (- x h)))
          (* 2 h)))
(define (is-good? f guess delta)
    (< (abs (f guess)) delta))
(define (improve f guess)
    (- guess (/ (f guess) (d/dx f guess 0.0001))))
;; newton: (number->number) number number number -> number
(define (newton f guess delta number)
    (cond
        [(or (is-good? f guess delta)
             (< number 0)) guess]
        [else (newton f (improve f guess) delta (- number 1))]))
```

ニュートン法の注意点

- 初期近似値の決め方
  - 初期近似値によって，求まる解が変わってくる
- 求まる解は，あくまでも「近似解」

  例：この例題では

  #i0.9999987646860998

  → #i 付きの近似計算で十分
- 虚数解は求まらない

```
;; d/dx: (number->number) number number -> number
;; inclination of the tangent
(define (d/dx f x h)
  (/ (- (f (+ x h)) (f
     (* 2 h)))
(define (is-good? f gu
  (< (abs (f guess)) d
(define (improve f gue
  (- guess (/ (f guess
;; newton: (number->nu
(define (newton f gues
  (cond
    [(or (is-good? f g
         (< number 0))
    [else (newton f (i
(define (f2 x)
  (+ (* x x x) (* -6 x x) (* 11 x) -6))
```

```
> (newton f2 #i0 0.00001 10000)
#i0.9999987646860998
> (newton f2 #i10 0.00001 10000)
#i3.0000000168443197
>
```

(newton f2 #i0 0.00001 10000)の結果

#i0.9999987646860998

(newton f2 #i10 0.00001 10000)の結果

#i3.0000000168443197

（違う値が得られた）

```
;; d/dx: (number->number) number number -> number
;; inclination of the tangent
(define (d/dx f x h)
  (/ (- (f (+ x h)) (f (- x h)))
     (* 2 h)))
(define (is-good? f guess delta)
  (< (abs (f guess)) delta))
(define (improve f guess)
  (- guess (/ (f gues
;; newton: (number->n
(define (newton f gue
  (cond
    [(or (is-good? f
         (< number 0)
    [else (newton f (improve f guess) delta (- number 1))]))
(define (f2 x)
  (+ (* x x x) (* -6 x x) (* 11 x) -6))
```

(newton f2 0 0.00001 10000)の結果

⇒　結果は「有理数」で得られる

（画面には表示しきれない）

```
> (newton f2 0 0.00001 10000)
4712895035483728276223543077658599972288988107547983866616864
6738501164188194170872003813652836601270858223763662496401537
6176185558955428840606330211429512341743751572394801282040044
0519774708536427191739245885404675583257130726611899554254903
4113789213780891684428510302648675501307064765924504300839341
2018394482986418373475561232781893395996808526512939639955161
3497325479071989100105948314434615365590384352892601626176260
1247247542170741878918507495821119322333646669765697566493002
5817915719197255953000498619445331013052761429798451507703571
8043564101157377084798372681836572616470568673900575682779460
8540396573336523857193153495281948368869320650625077942794904
2586218705638015946905568964591534256430624772319917007539837
9234994710543501683230760467930322616911120876353499515481765
6205530147259184641022391622420158409945652935726647486295327
5241417252982298342033674551892987703685320775919363185265304
3134769475374962597273040271893545520896604215672279866483341
```

「ニュートン法のプログラム」の理解のポイント

- 繰り返しの終了条件は２つ
  - 収束の条件を満足した $|f(x_n)| < \delta$
  - 繰り返しの上限回数を超えた
- 入力は４つ
  - 求めるべき関数: f
  - 初期近似値:　guess
  - 収束条件を決める値:　delta
  - 繰り返し回数の上限:　number

ニュートン法の繰り返し処理

- x_0 から始める
- x_1 を求める
- x_2 を求める

  …
- 「収束の条件を満足する」か「繰り返しの上限回数を超える」まで続ける

ニュートン法の繰り返し処理

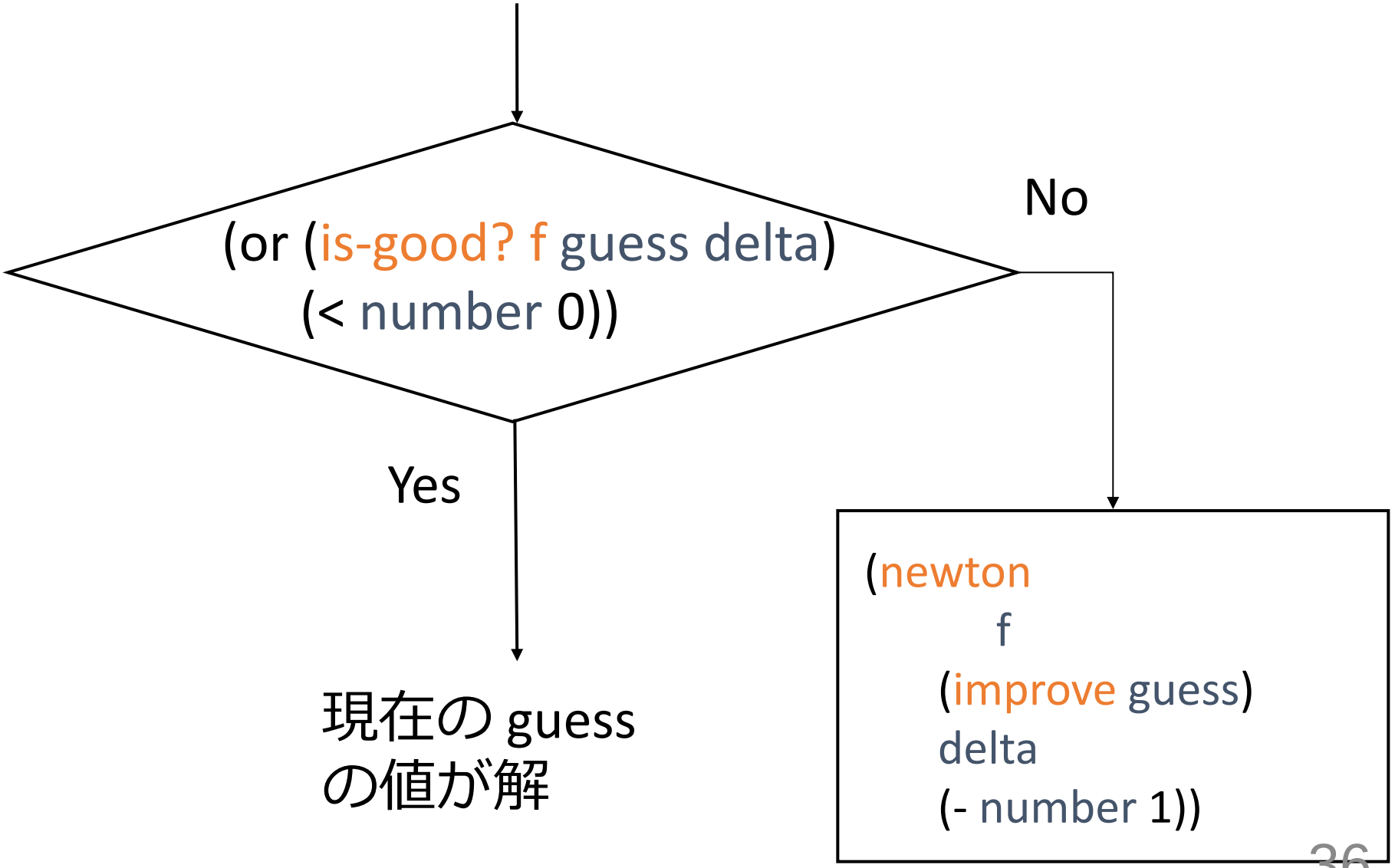
1. 「収束した」あるいは「繰り返しの上限回数を超えた」ならば：　→　終了条件

   現在の x_n の値　→　自明な解

2. そうで無ければ：
   - 「接線と x 軸の交点の計算」を行う

     求まった交点の x 座標の値は x_{n+1}
   - 結局，「収束する」か「繰り返しの上限回数を超える」まで，接線と x 軸の交点の計算を繰り返す

ニュートン法の繰り返し処理



(newton f2 #i0 0.00001 10000) から結果が得られる過程

(newton f2 #i0 0.00001 10000) 最初の式

= ...
= (newton (improve f2 #i0) 0.00001 9999)
= ...
= (newton #i0.5454545449588037 0.00001 9999)
= ...
= (newton (improve f2 #i0.5454545449588037) 0.00001 9998)
= ...
= (newton #i0.8489532098093157 0.00001 9998)
= ...
= (newton (improve f2 #i0.8489532098093157) 0.00001 9997)
= ...

コンピュータ内部での計算

= #i0.9999987646860998 実行結果

(newton f2 #i0 0.00001 10000) から結果が得られる過程

(newton f2 #i0 0.00001 10000)
= ...
= (newton (improve f2 #i0) 0.00001 9999)
= ...

これは,

```
(define (newton f guess delta number)
  (cond
    [(or (is-good? f guess delta)
         (< number 0)) guess]
    [else (newton f (improve f guess) delta (- number 1))]))
```

の f を f2 で，guess を #i0 で，delta を 0.00001で, number を 10000 で置き換えたもの

= #i0.9999987646860998

ニュートン法での判定基準

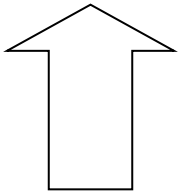
- ニュートン法では，現在の x_n の誤差（どれだけ真の値に近いか）は，正確には分からない

ニュートン法での収束条件

- is-good? が収束条件を判定

```
(define (is-good? f guess delta)
   (< (abs (f guess)) delta))
```

abs は「絶対値」を求める



$|f(x_n)| < \delta$ が成立するとき，出力は true.
（さもなければ false）

ニュートン法での繰り返し処理

number:　　カウンタ（繰り返しの残り回数）
guess:　　x_n の値（計算の途中結果）

number ← number − 1
guess ← (improve guess)

} を繰り返す

ニュートン法での繰り返し処理

```
(define (newton f guess delta number)
   (cond
      [(or (is-good? f guess delta)
           (< number 0)) guess]
      [else (newton f (improve f guess) delta (- number 1))]))
```

guess ← (improve f guess)

number ← number − 1

$f(x) = x^2 - 5$ での $x_1, x_2 \ldots$ の収束の様子

方程式　f(x) = x2 - 5
f(x)の導関数　f '(x) = 2x

(newton f #i1 0.00001 10000)
= …
= (newton f #i3.0 0.00001 10000)
= …
= (newton f #i2.3333333333333335 0.00001 9999)
= …
= (newton f #i2.238095238095238 0.00001 9998)
= …
= (newton f #i2.2360688956433634 0.00001 9997)
= …
= (newton f #i2.236067977499978 0.00001 9996)
= …

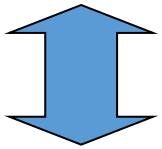
guess　delta　number

ニュートン法の注意点

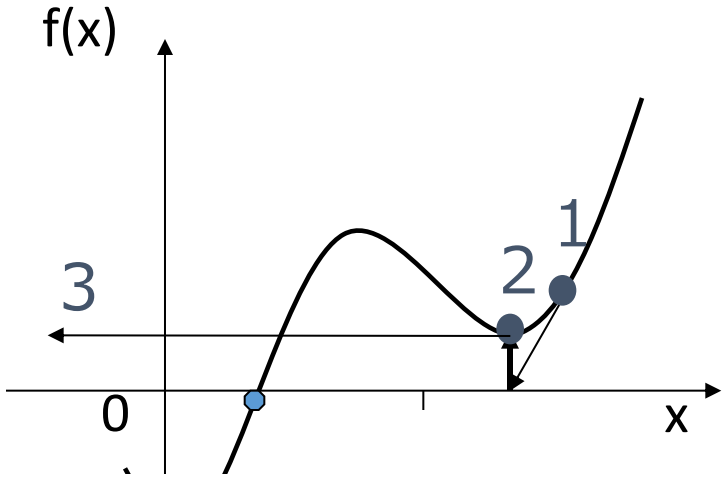
- 初期近似値の決め方
  - 初期近似値の設定の際、あまりに解と掛け離れた値を与えると、収束するのに時間がかかったり、収束しなかったりする
- delta の決め方
  - どの程度の精度で計算するかを決定していないと，εが決まらない

ニュートン法の能力と限界

ニュートン法は, 出発点とする十分近い解を見付けることができれば, 収束が早い.



初期近似値の選び方次第では，収束がしないことがありえる



関数 f (x)が単調でなくて変曲点を持つ（つまり f ′(x)の符号が変わる）とき

例）　上の図では：

2 ：　f'(x) = 0

3 ：　y 軸との交点が求まらない

（負の無限大に発散）

→　収束しない

対策

繰り返しの上限回数 number を設定

14-3 課題

課題 1

- 立方根を求めるプログラムを，Newton 法のプログラムを利用して作成せよ

  - $f(x) = x^3 - a = 0$ を解く
  - a が負のときにも正しく負の立方根を求めることができることを確認せよ
  - delta の値を変えて実行を繰り返し，得られた解の値の変化も報告しなさい

課題２．ニュートン法での収束

1. $f(x) = x^2 - 5$　のグラフを書け（手書き）
2. 1. で作成したグラフに，ニュートン法での，x_0, x_1, x_2, x_3 の値を書き加えなさい

但し，

- 関数

  方程式　$f(x) = x^2 - 5$
- 入力

  初期値　$x_0 = 1$

  収束条件を決める値　delta = 0.00001

  繰り返し回数の上限　number = 10000

x_1, x_2, x_3　の値は，実際にニュートン法のプログラムを実行して得ること

課題 3

- $(x-1)^4(x-2) = 0$ を　newton 法で解け
  - 初期近似値を変えて実行を繰り返し，得られた解の値の変化も報告しなさい

演習 4

- Newton 法により $f(x) = \tan^{-1} x + 0.3x$ を解け
  - 初期近似値の選び方によっては，正しく解を求めることができない．その理由についても考え，グラフを書いて説明しなさい．

さらに勉強したい人への補足説明事項

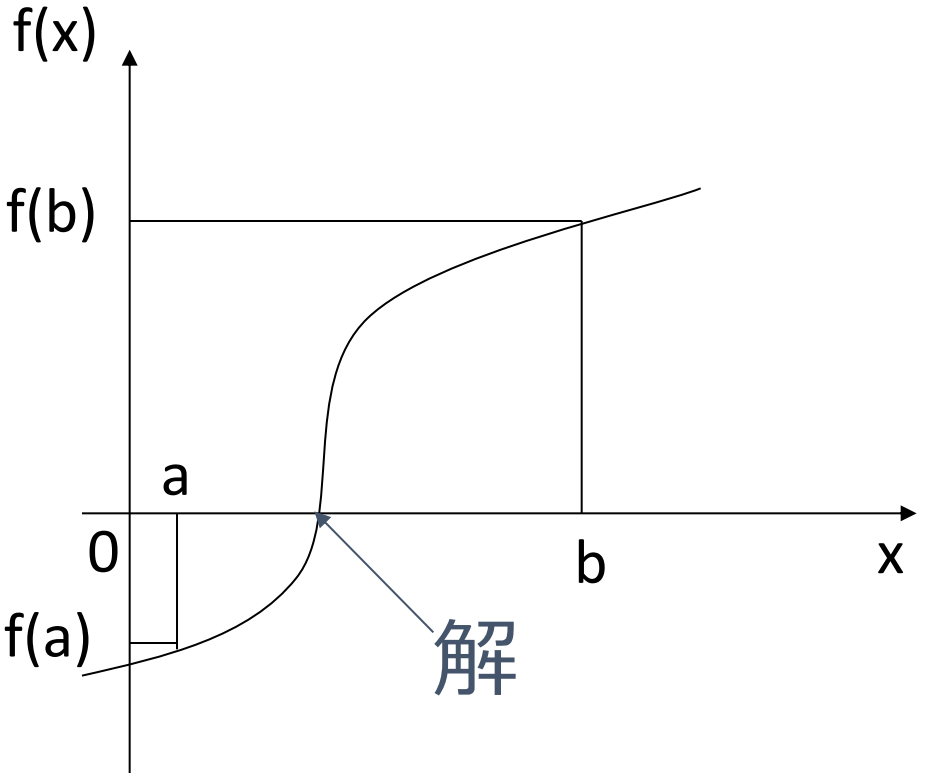
区間二分法

区間二分法

- 非線形方程式の求解の一手法

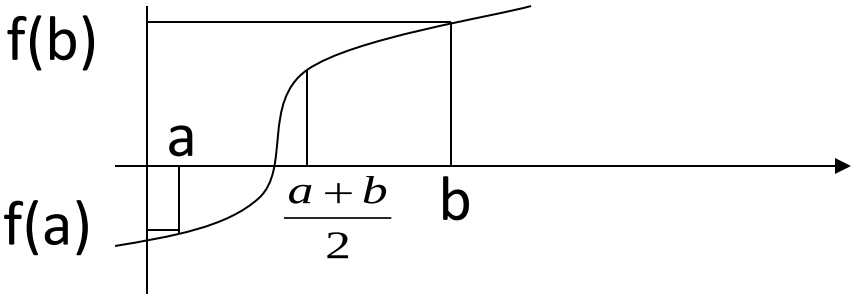
区間二分法 (half-interval method) の考え方

- 連続関数 f の性質
  「f(a)<0<f(b)ならば，[a, b]の間に f(x) = 0 の解がある



区間二分法 (half-interval method) の処理手順

- 「区間」を半分ずつ縮小するような処理手順
  1. ２点 a, b を定める
  2. ２点a,bの中点(a+b)/2について：
     f((a+b)/2)>0ならば → 解は，[a, (a+b)/2]にある
     f((a+b)/2)<0ならば → 解は，[(a+b)/2, b]にある
  3. 2. を繰り返す．「区間」の幅が小さくなる →解の近似値を得られる



例題２．区間二分法による非線形方程式の解

- $f(x)=x^2 -2$ を区間二分法で解くプログラム half-interval を書く
  - $f(x) = x^2 - 2$

解は　$\sqrt{2}$ と $-\sqrt{2}$

「例題２．区間二分法法による非線形方程式の解」の手順(1/2)

1. 次を「定義用ウインドウ」で，実行しなさい
   - 入力した後に，Execute ボタンを押す

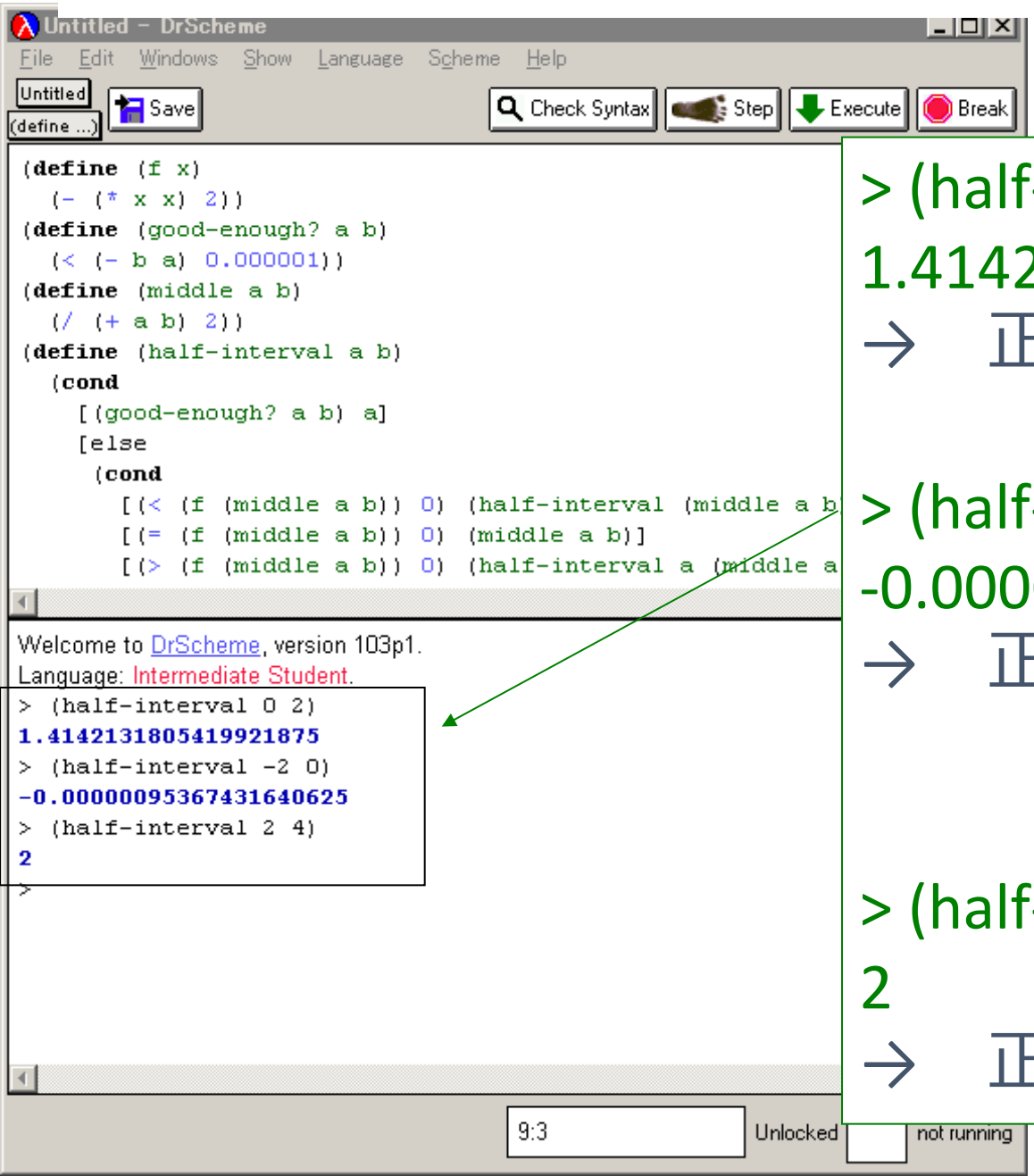
```
      (define (f x)
   (- (* x x) 2))
(define (good-enough? a b)
   (< (- b a) 0.000001))
(define (middle a b)
   (/ (+ a b) 2))
(define (half-interval a b)
   (cond
      [(good-enough? a b) a]
      [else
         (cond
            [(< (f (middle a b)) 0) (half-interval (middle a b) b)]
            [(= (f (middle a b)) 0) (middle a b)]
            [(> (f (middle a b)) 0) (half-interval a (middle a b))])]))
```

「例題２．区間二分法による非線形方程式の解」の手順(2/2)

2. その後，次を「実行用ウインドウ」で実行しなさい
   - 正しい解が得られている場合と，得られていない場合があることを確認しなさい

```
(half-interval 0 2)
(half-interval -2 0)
(half-interval 2 4)
```

「区間二分法による非線形方程式の解」の実行結果



> (half-interval 0 2)
1.4142131805419921875
→　正しい

> (half-interval -2 0)
-0.00000095367431640625
→　正しくない

> (half-interval 2 4)
2
→　正しくない

入力と出力

a の値: 0
b の値: 2

1.4142131805419921875

入力は２つの数値

出力は数値

区間二分法のプログラム

- 関数
  - 方程式　f(x)
- 入力
  - 初期値　a, b
- 出力
  - 解

区間二分法の処理手順

1. 初期値 a, b の決定
2. 区間を半分に縮小
   - f ((a+b)/2) の値が

     正：　　b ← ((a+b)/2

     0 ：　　(a+b)/2 が解である

     負：　　a ← ((a+b)/2
3. 2. を繰り返す

区間二分法の処理手順

$f(x) = x^2-2$, a = 0, b = 2 の場合

a = 0, b = 2

f((a+b)/2) = f(1) = -1

⇒ a を「1」に

a = 1, b = 2

f((a+b)/2) = f(1.5) = 0.25

⇒ b を「1.5」に

a = 1, b = 1.5

f((a+b)/2) = f(1.25) = -0.4375

⇒ a を「1.25」に

区間二分法の繰り返し処理

- half-interval の内部に half-interval が登場

```
(define (half-interval a b)
(cond
   [(good-enough? a b) a]
   [else
      (cond
         [(< (f (middle a b)) 0) (half-interval (middle a b) b)]
         [(= (f (middle a b)) 0) (middle a b)]
         [(> (f (middle a b)) 0) (half-interval a (middle a b))]))]))
```

- half-interval の実行が繰り返される

区間二分法での収束条件

- good-enough? が収束条件を判定

```
(define (good-enough? a b)
    (< (- b a) 0.000001))
```

b - a < 0.000001 が成立するとき，出力は true.
（さもなければ false）

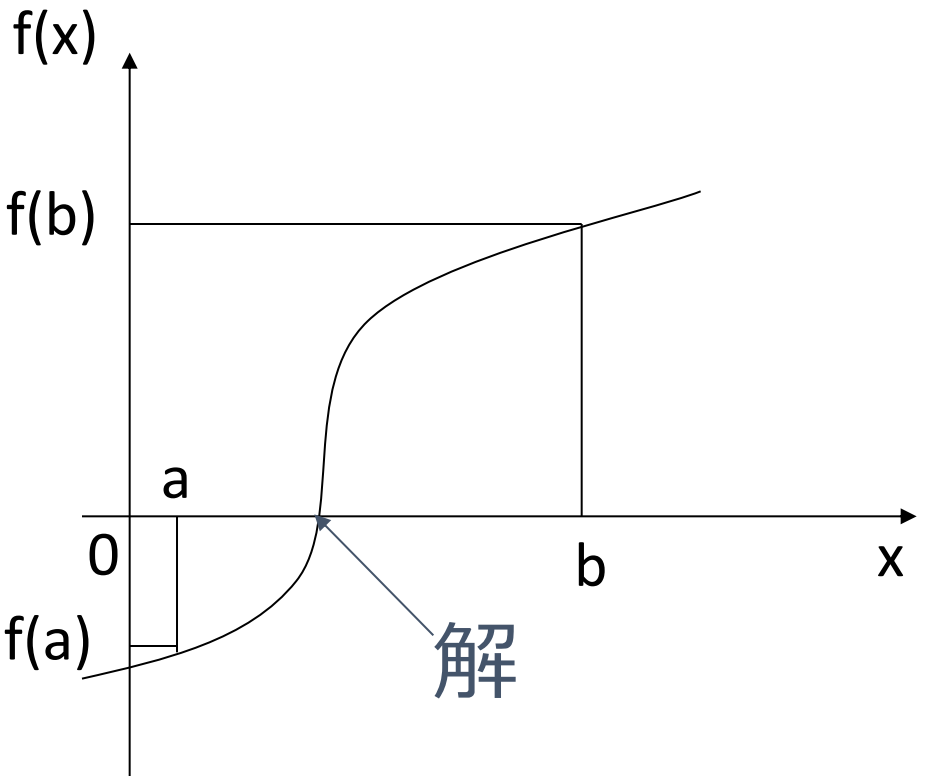
＊「0.000001」 は適当に決めた値

「区間二分法のプログラム」の理解のポイント

- 繰り返しの終了条件は２つ
  - b – a の値が，「しきい値」を下回った（収束した）
  - 「 f ((a+b)/2) = 0」となった
- 入力は２つ
  - 初期値　a, b
- 繰り返し処理：　反復的プロセス

区間二分法での注意点

- f(a) ≧0, f(b)≦0 でないと，解が得られない



例題３．区間二分法での繰り返し処理

- 例題２の「区間二分法」のプログラムについて，
  (half-interval 0 2) から(half-interval (middle 1 3/2) 3/2) までの過程を確認する

(half-interval 0 2)
= …
= (half-interval (middle 0 2) 2)
= …
= (half-interval 1 2)
= …
= (half-interval 1 (middle 1 2))
= …
= (half-interval 1 3/2)
= …
= (half-interval (middle 1 3/2) 3/2)

「例題３．区間二分法での繰り返し処理」の手順

1. 次を「定義用ウインドウ」で，実行しなさい
   - Intermediate Student で実行すること
   - 入力した後に，Execute ボタンを押す

```
      (define (f x)
   (- (* x x) 2))
(define (good-enough? a b)
   (< (- b a) 0.000001))
(define (middle a b)
   (/ (+ a b) 2))
(define (half-interval a b)
   (cond
      [(good-enough? a b) a]
      [else
         (cond
            [(< (f (middle a b)) 0) (half-interval (middle a b) b)]
            [(= (f (middle a b)) 0) (middle a b)]
            [(> (f (middle a b)) 0) (half-interval a (middle a b))]))]))
(half-interval 0 2)
```

例題２に
１行書き加える

2. DrScheme を使って，ステップ実行の様子を
   確認しなさい　（Step ボタン，Next ボタンを使用）
   - 理解しながら進むこと